

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. П. КРЮКОВ

Утверждено
Учебным управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу

ОСНОВЫ КРИОФИЗИКИ

Издательство МЭИ

Москва

1995

УДК
536
К 856
УДК: 531.3(075.8)

Элементы физической кинетики/А. П. Крюков. М.: Изд-во МЭИ, 1995.— 72 с.

Книга состоит из четырех глав, в которых последовательно рассмотрены общие понятия и определения, кинетическое уравнение Больцмана и методы его решения. Даны примеры решения задач энерго-массопереноса моментным методом, исследован процесс отражения звука от межфазной поверхности сверхтекучего гелия.

Содержит приложения, в которых представлены примеры расчета моментов функций распределения и моментов интеграла столкновения для максвелловских молекул.

Предназначено для студентов ЭФФ III и IV курсов.

Рецензенты

докт. физ.-мат. наук Ф. Г. Черемисин

докт. физ.-мат. наук проф. О. А. Синкевич

*Посвящается Дмитрию Александровичу
Лабунцову*

ВВЕДЕНИЕ

Задача физической кинетики — изучение процессов перехода от одного равновесного состояния к другому. Процессы переноса массы, импульса, энергии представляют собой примеры таких процессов. Как правило эти процессы исследуются в условиях, близких к равновесным, что позволяет успешно использовать для их описания методы гидрогазодинамики и традиционного теплообмена. При этом необходимо знать коэффициенты переноса (диффузии, вязкости, теплопроводности). Определение этих коэффициентов осуществляется эмпирически.

При значительном отклонении от равновесия применение упомянутого подхода становится неправомерным, что обуславливает необходимость использования методов физической кинетики. Важнейший элемент этого метода — принятие (выбор) модели исследуемой среды (газа, жидкости, твердого тела).

К настоящему времени достаточно хорошо разработана кинетика газовой среды. В настоящем пособии кратко изложены основы молекулярно-кинетической теории газов и более подробно рассмотрены приложения этой теории к задачам энерго-массопереноса, реализующимся как при низких, так и при высоких температурах.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Следуя [1], определим физическую кинетику как микроскопическую теорию процессов в статистически неравновесных системах. В отличие от свойств статистически равновесных систем, кинетические характеристики значительно более тесно связаны со спецификой (особенностями) микроскопических взаимодействий в тех или иных физических объектах. В качестве такого объекта рассматривается модель идеального газа, т. е. совокупности молекул, для которой осреднен-

ная по времени потенциальная энергия U существенно меньше осредненной по времени кинетической энергии E .

Специфика микроскопических взаимодействий для принятой модели идеального газа описывается потенциальной функцией парного взаимодействия атомов газа. Используется, как правило, межатомный, а не межмолекулярный потенциал, так что рассматривается только взаимодействие атомов или одноатомных молекул газа. Взаимодействие многоатомных молекул трактуется как для атома, т. е. внутренние степени свободы игнорируются.

Потенциальная энергия U взаимодействующих молекул (атомов) определяется видом зависимости $U=f(r)$, где r — расстояние между взаимодействующими частицами. Хотя, как отмечается в [2], о точной природе межатомных потенциалов известно сравнительно мало, некоторую важную информацию о форме таких потенциалов можно вывести из очень простых фактов.

Например, в общем понятно, что атомы на «больших» расстояниях притягивают друг друга, в то время как на меньших расстояниях они взаимно отталкиваются: газы из-за этого «дальнедействующего притяжения» конденсируются, а жидкости и твердые тела из-за «короткодействующего отталкивания» имеют ненулевые объемы. Отсюда следует, что простейшая возможная форма зависимости потенциальной энергии U от r должна быть, по-видимому, такой, как показано на рис. 1.1 г. Область притяжения находится там, где $dU(r)/dr > 0$, т. е. при $r > d$, а область отталкивания там, где $dU(r)/dr < 0$, т. е. при $r < d$. Область $U(r) < 0$ иногда называется потенциальной ямой.

Наиболее часто используются в анализе представленные ниже потенциалы взаимодействия. Соответствующие параметры потенциалов взаимодействия находятся, как правило, эмпирически в экспериментах по определению транспортных свойств (вязкости и теплопроводности), вириальных коэффициентов, рассеянию молекулярных пучков. Считается, что параметры потенциала взаимодействия можно вычислить в результате решения квантовомеханической задачи о взаимодействии системы электронов и ядра одной молекулы с соответствующей системой другой молекулы.

Очевидно, что сама по себе эта задача не проста. Эмпирическая информация в таком подходе черпается из результатов спектрального анализа, позволяющего найти энергетические уровни молекул.

1.1. Потенциалы взаимодействия

А. Молекулы взаимодействуют как твердые упругие шары диаметром d . Зависимость $U=f(r)$, где r — расстояние между центрами взаимодействующих шаров, в этом случае имеет вид, представленный на рис. 1.1 а

$$\begin{aligned}U &\rightarrow \infty && \text{при } r=d; \\U &= 0 && \text{при } r>d.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Потенциал описывается одним параметром d .

Б. Молекулы отталкиваются друг от друга. Сила отталкивания F при этом обратно пропорциональна расстоянию между центрами молекул r в степени s (рис. 1.1 б):

$$U = \frac{K}{r^{s-1}}; \quad F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{K(s-1)}{r^s},\tag{1.2}$$

где K и s — постоянные.

Потенциал описывается двумя параметрами K и s . При $s=5$ (1.2) определяет так называемые максвелловские молекулы, т. е. максвелловские молекулы — это молекулы, которые отталкиваются друг от друга с силой обратно пропорциональной пятой степени расстояния.

В. Потенциал Леннарда—Джонса (иногда называется потенциалом 6—12 или потенциалом Л—Д). На большом расстоянии молекулы притягиваются друг к другу, на малом отталкиваются (рис. 1.1 в)

$$U = 4\varepsilon \left[\left(\frac{d}{r} \right)^{12} - \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right],\tag{1.3}$$

где ε и d — постоянные. Потенциал описывается двумя параметрами ε и d . Здесь ε — глубина потенциальной ямы. Член $(d/r)^{12}$ в (1.3) описывает отталкивательную ветвь потенциала, актуальную для малых расстояний между молекулами, член $(d/r)^6$ в (1.3) характеризует притяжение молекул. Роль этого члена существенна при больших r . При $r = \sqrt[6]{2}d$ $U = -\varepsilon$, зависимость $U = f(r)$ проходит через минимум, меняется знак силы (нижняя часть рис. 1.1 в). Для $r = \sqrt[6]{26/7}d$ модуль силы притяжения — максимален, при этом значение силы равно $-2,4\varepsilon/d$.

Г. Потенциал Морзе (см. рис. 1.1 г)

$$U = \varepsilon \left[e^{-2a(r-d)} - 2e^{-a(r-d)} \right],\tag{1.4}$$

где ε, d, a — постоянные. Потенциал описывается тремя параметрами ε, d, a , хотя часто полагают, что $ad \cong 6$, т. е. число параметров сокращается до двух. Наличие в (1.4) экспонент вместо степенных функций r , как в потенциале 6—12, делает более удобным потенциал Морзе при выполнении расчетов взаимодействия молекул. В то же время для этого потенциала U неправдоподобно быстро уменьшается при $r \rightarrow \infty$.

Д. Потенциал Сезерленда (рис. 1.1 ∂)

$$\begin{aligned} U &\rightarrow \infty && \text{при } r = d; \\ U &= -\varepsilon (d/r)^m && \text{при } r > d. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь ε, d, m — постоянные. Потенциал описывается тремя параметрами ε, d, m .

1.2. Функция распределения

Известно [3, 4], что описание систем, состоящих из большого числа частиц может успешно осуществляться вероятностными методами. Примером такой системы является рассматриваемая модель газа. Для одноатомного газа состояние совокупности молекул определяется их координатами и значениями проекций скоростей на соответствующие координатные оси. Вводимое ниже понятие функции распределения f связано с вероятностью нахождения рассмотренной системы в определенном состоянии, точнее с плотностью распределения вероятностей. Определение функции распределения f , дается следующим образом:

$$f(\vec{x}, \vec{\xi}, t) d\vec{x}d\vec{\xi} — \quad (1.6)$$

есть ожидаемое число молекул в объеме $d\vec{x}d\vec{\xi}$, координаты которых находятся в интервале от \vec{x} до $\vec{x}+d\vec{x}$, а скорости в интервале от $\vec{\xi}$ до $\vec{\xi}+d\vec{\xi}$. В (1.6) и далее \vec{x} — координаты молекулы в лабораторной системе координат, а $\vec{\xi}$ — скорость в этой же системе координат, t — время.

Из (1.6) следует, что для реального физического пространства функция распределения — функция семи переменных. Для данной точки пространства в заданный момент времени функция распределения зависит от трех компонент

скорости молекул по осям x, y, z : ξ_x, ξ_y, ξ_z . В частности равновесное максвелловское распределение имеет вид

$$f = n(1/2\pi RT)^{3/2} \exp[-(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)/2RT], \quad (1.7)$$

где n — числовая плотность (концентрация) газа; T — температура; R — индивидуальная газовая постоянная. Графическое изображение (1.7) требует четырехмерного пространства. Трехмерное представление функции распределения возможно лишь при заданной одной из проекций ξ_x, ξ_y, ξ_z . На рис. 1.2 показана функция (1.7) при $\xi_z = 0$. Сечения функции распределения плоскостями $\xi_z = 0, f = \text{const}$ и $\xi_z = 0, \xi_y = \text{const}$ представлены соответственно на рис. 1.3 и 1.4.

1.3. Моменты функции распределения

Момент функции распределения представляет собой интеграл по пространству скоростей от этой функции, взятый с определенным весом. Таким образом момент $M(\varphi f)$ вычисляется следующим выражением:

$$M(\varphi f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{\xi}) f d\vec{\xi}, \quad (1.8)$$

где $\varphi(\vec{\xi})$ — некоторая функция $\vec{\xi}$. Определение (1.8) позволяет по известной функции распределения находить средние по пространству скоростей значения φ . Здесь и далее $\int_{-\infty}^{\infty}$ обозначает тройной интеграл по $\vec{\xi}$.

В частности, из определений (1.6) и (1.8) следует, что

$$\rho = m \int_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi}, \quad (1.9)$$

где ρ — плотность газа; m — масса молекулы;

$$j_x = \rho u_x = m \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x d\vec{\xi}, \quad (1.10)$$

где j_x — x -я проекция плотности потока массы; u_x — x -я проекция скорости потока газа \vec{u} ;

$$\Pi_{kl} = m \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k \xi_l f d\vec{\xi}, \quad (1.11)$$

где Π_{kl} — тензор плотности потока импульса;

$$E_x = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_k \vec{\xi}^2 f d\vec{\xi}, \quad (1.12)$$

где E_x — x -я проекция плотности потока энергии

$$P_{kl} = m \int_{-\infty}^{\infty} c_k c_l f d\vec{\xi}, \quad (1.13)$$

где \vec{c} — относительная скорость молекул газа, т. е. $\vec{c} = \vec{\xi} - \vec{u}$ и $c_k = \xi_k - u_k$; $c_l = \xi_l - u_l$; P_{kl} — тензор давлений (напряжений); $p_{ke} = P_{ke} - \delta_{ke} P$

$$q_x = \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c_x \vec{c}^2 f d\vec{\xi}, \quad (1.14)$$

где q_x — x -я проекция плотности теплового потока

$$\frac{3}{2} kT = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\vec{c}^2}{2} f d\vec{\xi}. \quad (1.15)$$

где T — температура газа; k — постоянная Больцмана.

Из последнего выражения видно, что кинетически определенная температура пропорциональна дисперсии скорости. Соотношения (1.9)–(1.15) дают возможность по функции распределения f , описывающей систему молекул на микроуровне, получить значения макровеличин: плотности, температуры, потоков массы, импульса, энергии, и т. д., непосредственно измеряемых и регулируемых в эксперименте.

Нахождение функции распределения — центральная задача физической кинетики. Эволюция функции распределения в пространстве и во времени находится в результате решения кинетического уравнения Больцмана.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Уравнение выведено Больцманом более ста лет назад (в 1872 году) на основе анализа столкновений молекул. В результате такого анализа была получена взаимосвязь скоростей молекул до и после столкновений. Позже в 40-х годах нынешнего века Н. Н. Боголюбов, М. Борн, Х. Грин, Дж. Кирквуд, Дж. Ивон получили так называемую цепочку (иерархию) уравнений ББГКИ (по первым буквам фамилий авторов). Эта иерархия выводилась из основного уравнения

статистической механики — уравнения Лиувилля, выражающего сохранение N -частичной функции распределения в $6N$ -мерном фазовом пространстве; N -частичная функция распределения дает излишне детальное описание, поэтому ставилась задача нахождения функции распределения более низкого порядка, например s -частичной ($s < N$), т. е. функции, определяющей вероятность обнаружения s молекул в некотором состоянии независимо от состояния остальных $N-s$ молекул.

Совокупность уравнений БГКИ образует систему s зацепляющихся интегродифференциальных уравнений для одно-, двух-, трех-, ..., частичной функции распределения. Существенно, что в уравнение для одночастичной функции входит двухчастичная функция, в уравнение для двухчастичной — трехчастичная, ..., в уравнение для s -частичной — $(s+1)$ -частичная функция.

Последним уравнением иерархии БГКИ является уравнение для одночастичной функции распределения. Оно содержит и двухчастичную функцию распределения, но становится замкнутым уравнением для одночастичной функции распределения после введения предположения о молекулярном хаосе, позволяющем выразить двухчастичную функцию в виде произведения одночастичных функций.

Таким образом полученное уравнение для одночастичной функции распределения эквивалентно кинетическому уравнению, впервые сформулированному Больцманом.

Подробный вывод уравнения Больцмана можно найти, например, в [3, 4]. Здесь же лишь представляется его общий вид (2.1) и даются краткие комментарии к выводу:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \frac{\vec{X}_0}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} = J, \quad (2.1)$$

где X_0 — массовая сила, обусловленная наличием различных полей (гравитационного, электрического, магнитного), действующая на молекулу; J — интеграл столкновений. Именно этот член уравнения Больцмана учитывает столкновения молекул друг с другом и соответствующие изменения скоростей взаимодействующих частиц.

Интеграл столкновений представляет собой пятимерный интеграл и имеет следующую структуру:

$$J = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (f' f_1 - f f_1) |\vec{g}| b db d\epsilon d\vec{\xi}_1. \quad (2.2)$$

Входящие в (2.2) обозначения поясняются ниже. Уравнение (2.1) с интегралом (2.2) получено для столкновений молекул, при которых не возникает тангенциальных сил, т. е. сталкивающиеся частицы считаются идеально гладкими.

В процессе взаимодействия внутренняя энергия молекул не меняется, т. е. предполагается, что эти молекулы являются идеально упругими*. Рассматриваются две группы молекул, имеющих до соударения друг с другом (столкновения) скорости $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}_1$ (рис. 2.1), а после столкновения соответственно скорости $\vec{\xi}'$ и $\vec{\xi}'_1$. Разность скоростей $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}$ называется относительной скоростью, т. е. $\vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}$. Ясно, что для гладкого упругого столкновения $\vec{g} = \vec{\xi}'_1 - \vec{\xi}'$. Функции распределения f'_1, f', f_1, f описывают молекулы соответствующих групп после и до столкновений, т. е.

$$\vec{f} = f(t, \vec{x}, \vec{\xi}); \quad f_1 = f(t, \vec{x}, \vec{\xi}_1); \quad f' = f(t, \vec{x}, \vec{\xi}'); \quad f'_1 = f(t, \vec{x}, \vec{\xi}'_1).$$

В (2.2) входят два параметра, характеризующие расположение сталкивающихся молекул друг относительно друга: b и ϵ ; b — прицельное расстояние, т. е. наименьшее расстояние, на которое сблизились бы молекулы при отсутствии взаимодействия (рис. 2.2); ϵ называют угловым параметром столкновений (рис. 2.3). Интегрирование по b от 0 до ∞ и по ϵ от 0 до 2π (два внешних интеграла в (2.2)) охватывает всю плоскость силового взаимодействия перпендикулярную вектору \vec{g} . При этом потенциал взаимодействия может быть любым, в том числе и с «бесконечно действующей» ветвью.

2.1. Краткие комментарии к выводу

Кинетическое уравнение Больцмана (2.1) выведено при следующих допущениях и предположениях.

1. Считается, что происходят в основном столкновения двух молекул, т. е. роль столкновений одновременно трех и большего числа молекул незначительна. Это допущение позволяет использовать для анализа одночастичную функцию распределения, которая выше названа просто функцией распределения. Учет столкновений трех молекул приводит к необходимости использования в исследовании двухчастичной

* Известны обобщения уравнения Больцмана, в которых учитывается изменение внутренней энергии в процессе столкновений [5].

функции распределения. Соответственно анализ существенно усложняется.

2. Предположение о молекулярном хаосе. Оно выражается в том, что вероятности обнаружения частицы 1 в фазовой точке $(\vec{x}_1, \vec{\xi}_1)$ и частицы 2 в фазовой точке $(\vec{x}_2, \vec{\xi}_2)$ независимы друг от друга.

3. Равновероятны столкновения молекул с любым прицельным расстоянием, т. е. функция распределения не меняется на диаметре взаимодействия. Необходимо отметить, что анализируемый элемент $d\vec{x}$ должен быть мал, чтобы f в пределах этого элемента не менялась, но в то же время $\sqrt{nd\vec{x}} \gg 1$, чтобы была не велика относительная флуктуация $\frac{\Delta f}{f} \sim \frac{1}{\sqrt{nd\vec{x}}}$. Потенциалы взаимодействия, используемые при вычислении интеграла столкновений (2.2), являются сферически симметричными, т. е. $\vec{g} = \vec{g}'$, $b = b'$, $\varepsilon = \varepsilon'$.

2.2. Моменты интеграла столкновений. Некоторые свойства интеграла столкновений

Момент интеграла столкновений $I(\varphi)$ определяется аналогично моменту функции распределения (см. разд. 1.3 соотношение (1.8))

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{\varphi(\xi)} J d\xi, \quad (2.3)$$

где J — интеграл столкновений. Таким образом $I(\varphi)$ — восьмимерный интеграл.

Интеграл столкновений обладает свойствами симметрии, что позволяет получить следующие выражения:

$$I(\varphi) = 1/4 \int |(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) (f'f'_1 - ff_1)| \vec{g} |b| db d\varepsilon d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}; \quad (2.4a)$$

$$I(\varphi) = 1/2 \int (\varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1) ff_1 |\vec{g}| |b| db d\varepsilon d\vec{\xi}_1 d\vec{\xi}. \quad (2.4б)$$

Подробный вывод (2.4a) и (2.4б) можно найти в [4]. Здесь и далее для удобства вместо восьми знаков интегралов записывается один. При этом естественно подразумевается, что интегралы типа (2.4a), (2.4б) — восьмимерные. В выражениях (2.4a), (2.4б) и аналогичных $\varphi = \varphi(\vec{\xi})$; $\varphi_1 = \varphi(\vec{\xi}_1)$; $\varphi' = \varphi(\vec{\xi}')$; $\varphi'_1 = \varphi(\vec{\xi}'_1)$.

Существуют такие функции скорости $\varphi(\vec{\xi})$, для которых выполняется условие $\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1' = 0$. Эти функции называются сумматорными инвариантами (в переводе с латинского *invariants* — неизменный, неизменяющийся). В процессе столкновений выполняются законы сохранения массы, импульса, энергии. Для двух одинаковых взаимодействующих молекул запись этих законов имеет вид

$$\begin{aligned} m + m &= m + m; \\ m\xi_x + m\xi_{x1} &= m\xi'_x + m\xi'_{x1}; \\ m\xi_y + m\xi_{y1} &= m\xi'_y + m\xi'_{y1}; \\ m\xi_z + m\xi_{z1} &= m\xi'_z + m\xi'_{z1}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$1/2 m\vec{\xi}^2 + 1/2 m\vec{\xi}_1^2 = 1/2 m(\vec{\xi}')^2 + 1/2 m(\vec{\xi}'_1)^2.$$

Величины m , $m\vec{\xi}$ и $1/2 m\vec{\xi}^2$ называются инвариантами столкновений. Имея в виду определения φ , φ_1 , φ' , φ_1' , приведенные выше, выражения (2.5) могут быть записаны как $\varphi_n + \varphi_{n1} = \varphi'_n + \varphi'_{n1}$, где $n=0, 1, 2, 3, 4$; $\varphi_0 = m\varphi_1 = m\xi_x$; $\varphi_2 = m\xi_y$; $\varphi_3 = m\xi_z$; $\varphi_4 = (m\vec{\xi}^2)/2$. Ясно, что подстановка инвариантов столкновений φ_n в (2.4а) и (2.4б) дает $I(\varphi_n) = 0$.

Следовательно, если умножить интеграл столкновений на инвариант столкновений и выполнить интегрирование по пространству скоростей, результат интегрирования даст нуль. Можно показать, что инварианты столкновений и их линейные комбинации являются единственными возможными сумматорными инвариантами. Поэтому, если φ — сумматорный инвариант, то $I(\varphi) = 0$ и φ имеет вид

$$\varphi = A m\vec{\xi}^2 + \vec{B} m\vec{\xi} + C,$$

где A , \vec{B} , C — постоянные.

2.3. H -функция и H -теорема

Особый интерес представляет следующий момент функции распределения, называемый H -функцией для единицы объема

$$H = \int f \ln f d\vec{\xi}, \quad (2.6)$$

где H -функция связана с вероятностью обнаружения системы из молекул газа в данном состоянии. Каждому состоя-

нию соответствуют определенные числа заполнения шестимерных пространственно-скоростных ячеек, на которые может быть разбито фазовое пространство рассматриваемых молекул. Обозначим W вероятность того, что в первой ячейке рассматриваемого шестимерного пространства окажется N_1 молекул, во второй N_2 и т. д.

Можно показать [4], что с точностью до постоянной, определяющей начало отсчета вероятности правомерно соотношение

$$\ln W = - \int_A f \ln(f) d\vec{x}d\vec{\xi}, \quad (2.7)$$

где $\int_A f \ln(f) d\vec{x}d\vec{\xi}$ — H -функция области пространства A , занятой газом. Из (2.7) видно, что W и H взаимосвязаны, т. е. изменение вероятности состояния приводит к соответствующей эволюции H -функции.

Момент

$$H_x = \int f \xi_x \ln f d\vec{\xi} \quad (2.8)$$

называется плотностью потока H -функции (точнее x -й проекцией этого потока). Если умножить обе части уравнения Больцмана (2.1) при $\vec{X}_0 = 0$ на $1 + \ln f$ и проинтегрировать по $\vec{\xi}$, то получим, например, для одномерной задачи

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} = I(1 + \ln f). \quad (2.9)$$

Рассмотрим момент интеграла столкновений $I(1 + \ln f) = I(\ln f)$. В силу (2.4а)

$$I(\ln f) = 1/4 \int (\ln f + \ln f_1 - \ln f' - \ln f'_1) \times \\ \times (f'f'_1 - ff_1) |g| b db d\epsilon d\vec{\xi} d\vec{\xi}_1. \quad (2.10)$$

Выражение в первых круглых скобках может быть представлено как $\ln(ff_1/f'f'_1)$. Анализ выражения $A = (f'f'_1 - ff_1) \times \ln(ff_1/f'f'_1)$ показывает, что это произведение всегда меньше нуля. Действительно, при $f'f'_1 > ff_1$ $\frac{ff_1}{f'f'_1} < 1$ и $\ln \frac{ff_1}{f'f'_1} < 0$. Таким образом $A < 0$. При $f'f'_1 < ff_1$ $(f'f'_1 - ff_1) < 0$, но $\frac{ff_1}{f'f'_1} > 1$, $\ln \frac{ff_1}{f'f'_1} > 0$ и в итоге опять $A < 0$. Следовательно-

но, в любом случае, имея в виду (2.9) и (2.10), получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} \leq 0. \quad (2.11)$$

Для стационарной постановки $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ и выражение (2.11) представляет собой частный случай H -теоремы Больцмана для одномерной задачи, показывающее, что с ростом x поток H -функции убывает, т. е. столкновения молекул действуют как отрицательный источник величины H . Для одномерной задачи, т. е. при $\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$ из (2.11) следует, что $\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0$, т. е. в силу (2.7) вероятность состояния W с течением времени возрастает, а H -функция убывает, стремясь к минимальному значению, которое характеризует газ в равновесии.

Необходимое условие минимума H (при $\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0$) или H_x (при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) состоит соответственно в выполнении соотношений

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.12a)$$

или

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \quad (2.12б)$$

Выражения (2.12) — частные случаи неравенства (2.11), которое получено из кинетического уравнения Больцмана в результате умножения его на $\varphi = 1 + \ln f$ и последующего интегрирования по пространству скоростей. Таким образом $I(\varphi) = 0$. В конце разд. 2.2 отмечалось, что если φ — суммарный инвариант, то φ имеет вид

$$\varphi = A m \vec{\xi}^2 + B m \vec{\xi} + C_1. \quad (2.13)$$

Это соотношение позволяет в явном виде определить функцию распределения f , которая описывает газ в состоянии термодинамического равновесия, т. е. минимума H -функ-

ции. Действительно, из (2.13) следует

$$\frac{1}{m} \ln f = A (\xi_x + B_x/2A)^2 + A (\xi_y + B_y/2A)^2 + A (\xi_z + B_z/2A)^2 + \left(C - \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{4A} \right), \quad (2.14)$$

где $C = (C_1 - 1)/m$. В соответствии с (2.14)

$$f = \exp \{ Am [(\xi_x + B_x/2A)^2 + (\xi_y + B_y/2A)^2 + (\xi_z + B_z/2A)^2] \} \times \exp \{ Cm - m(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/4A \}. \quad (2.15)$$

По определению числовой плотности $n = \int_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi}$. Величина n — конечна. Для функции (2.15) интеграл по $\vec{\xi}$ имеет ограниченное значение лишь при $Am < 0$. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x dx = 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^2 dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\pi/\alpha}. \quad (2.16)$$

Таким образом для f , вычисленной по (2.15), $\alpha = |A|m$. Соответственно

$$n = (\pi/m|A|)^{3/2} \exp \{ Cm - m(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/4A \}. \quad (2.17)$$

По определению

$$u_x = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f d\vec{\xi}; \quad u_y = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_y f d\vec{\xi}; \quad u_z = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_z f d\vec{\xi}. \quad (2.18)$$

Из (2.15), (2.16), (2.18) следует

$$u_x = -B_x/2A, \quad u_y = -B_y/2A; \quad u_z = -B_z/2A. \quad (2.19)$$

В соответствии с (1.15)

$$T = \frac{m}{3kn} \int_{-\infty}^{\infty} [(\xi_x - u_x)^2 + (\xi_y - u_y)^2 + (\xi_z - u_z)^2] f d\vec{\xi}.$$

Имея в виду это выражение, (2.16) и (2.19), получим

$$T = (2|A|k)^{-1}, \text{ или } |A| = 1/2 kT. \quad (2.20)$$

С учетом (2.20) из (2.19) можно выразить B_x, B_y, B_z через T и u_x, u_y, u_z :

$$B_x = u_x/kT; \quad B_y = u_y/kT; \quad B_z = u_z/kT. \quad (2.21)$$

При наличии (2.20) и (2.21) из (2.17) следует

$$\exp\{Cm - m(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/4A\} = n\{m/2\pi kT\}^{3/2}. \quad (2.22)$$

Подставив (2.21), (2.20) и (2.22) в (2.15), имеем

$$f = n\{m/(2\pi kT)\}^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2kT} [(\xi_x - u_x)^2 + (\xi_y - u_y)^2 + (\xi_z - u_z)^2]\right\}. \quad (2.23)$$

В итоге приходим к выводу о том, что равновесное состояние газа описывается абсолютным максвелловским распределением (2.23). Следует заметить, что проделанный вывод (2.23) не потребовал привлечения дополнительных допущений и упрощений.

Рассмотрим далее взаимосвязь H -функции для равновесного состояния и энтропии. Из первого начала термодинамики и определения энтропии s следует, что

$$Tds = C_v dT + Pdv, \quad (2.24)$$

где P — давление; C_v — теплоемкость при постоянном объеме. Выражение (2.24) записано для удельных величин. По уравнению Менделеева—Клапейрона $\frac{P}{T} = \frac{R}{v}$ и выражение (2.24) приводится к виду

$$s = \int (C_v/T) dT + \int (R/v) dv. \quad (2.25)$$

Для идеального одноатомного газа $C_v = 3/2 R = \text{const}$. Интегрирование (2.25) дает

$$s = 3/2 R \ln T + R \ln(v) = R[\ln T^{3/2} - \ln(\rho)]. \quad (2.26)$$

В соответствии с определением H -функции единицы объема (2.6) для равновесного максвелловского распределения (2.23) имеем

$$H = \int f \ln f d\vec{\xi} = n\{\ln[n/(2\pi RT)^{3/2}] - 3/2\}. \quad (2.27)$$

Из этого выражения H -функция на единицу массы H/ρ определяется соотношением

$$\frac{H}{\rho} = \frac{1}{m} [\ln(n) - \ln T^{3/2} - \ln(2\pi R)^{3/2} - 3/2], \quad (2.28)$$

где m — масса молекулы. Умножив обе части этого выражения на постоянную Больцмана k и сложив полученный результат с (2.26), получим, имея в виду $k/m=R$:

$$s + Hk/\rho = R[-\ln(2\pi R)^{3/2} - 3/2 - \ln m]. \quad (2.29)$$

Правая часть (2.29) — постоянная, поэтому

$$s + Hk/\rho = \text{const}. \quad (2.30)$$

Если значение этой const принять за начало отсчета энтропии, то из (2.30) следует

$$H = -(s\rho)/k. \quad (2.31)$$

Легко также показать, что для равновесного максвелловского распределения (2.23) H_x поток H -функции по оси x с учетом (2.27) и (2.31) может быть выражен следующим образом:

$$H_x = -s\rho u/k. \quad (2.32)$$

В заключение этого анализа вслед за [4] отметим, что из H -теоремы для одномерной стационарной постановки следует известный факт возрастания энтропии в ударных волнах. Действительно, из (2.11) при $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ следует $\frac{\partial H_x}{\partial x} \leq 0$. Далее будем рассматривать только неравенство, т. е. равенство, характеризующее равновесие во всей области, считаем неактуальным. Таким образом $H_{x_2} - H_{x_1} < 0$, при $x_2 > x_1$, где x_1 и x_2 — координаты контрольных сечений по оси x . Следовательно,

$$H_{x_2} < H_{x_1}. \quad (2.33)$$

Имея в виду, что для одномерной стационарной задачи в силу закона сохранения массы $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$, получим из (2.32) и (2.33)

$$s_1 < s_2. \quad (2.34)$$

По постановке задачи сечение 1—1 расположено ближе к началу координат чем сечение 2—2. Оба этих сечения находятся в областях, где состояние газа равновесно. Вывод

(2.34) показывает, что переход от первого из них ко второму возможен лишь таким образом, при котором энтропия газа возрастает.

2.4. Модельные уравнения

Трудности решения уравнения Больцмана связаны в первую очередь со сложной структурой интеграла столкновений. Стремление упростить этот интеграл, сохранив при этом основные черты кинетического уравнения, привело в 1954 году [6] к формулированию так называемого модельного уравнения БГК (Бхатнагара, Гросса, Крука)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial f}{\partial t} = \nu (f_0 - f). \quad (2.35)$$

В (2.35) ν — постоянный множитель, частота столкновений; f_0 — равновесная максвелловская функция распределения, плотность, скорость и температура которого равна соответствующим величинам, рассчитанным по искомой функции f , т. е. выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \int f_0 d\vec{\xi} &= \int f d\vec{\xi}; \\ \int f_0 \xi_i d\vec{\xi} &= \int f \xi_i d\vec{\xi}; \\ \int f_0 (\vec{\xi} - \vec{u})^2 d\vec{\xi} &= \int f (\vec{\xi} - \vec{u})^2 d\vec{\xi}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $u_i = \int f_0 \xi_i d\vec{\xi} / \int f_0 d\vec{\xi}$. Уравнение (2.35) с правой частью в виде $(f_0 - f)/\tau$, где $\tau = 1/\nu$, называется также однорелаксационным уравнением. Это уравнение, как и уравнение БГК (2.35) при равновесии, т. е. $f = f_0$, дает в правой части нуль, как и уравнение Больцмана.

По мере отклонения от равновесия роль правой части увеличивается, что также по тенденции совпадает с поведением интеграла столкновений и в целом уравнения Больцмана. Анализ применения уравнения БГК для решения задач энергомассопереноса показывает, что это уравнение дает для одноатомного газа значение числа Прандтля равное единице, вместо $3/4$. Таким образом следует с осторожностью использовать модельное уравнение в задачах, где одновременно проявляются и вязкость, и теплопроводность. Более совершенные модели кинетического уравнения были получены в конце 60-х годов Е. М. Шаховым и названы s -моделями [7].

2.5. Постановка задач

В [4] предложен следующий подход к постановке задач. Для решения необходимо задать начальное условие, т. е. $f|_{t=0}$ и функцию распределения при $x=0$, т. е. на ограничивающих область течения поверхностях для частиц, летящих от межфазной поверхности, т. е. для $\vec{\xi}$, удовлетворяющих неравенству $\vec{n} \cdot \vec{\xi} > 0$, где \vec{n} — вектор нормали к границе раздела фаз, направленный в сторону, занятую газом. Функция распределения для $t > 0$ и $x > 0$ при такой постановке определяется в результате решения кинетического уравнения.

Вид функции f^+ определяется принимаемой моделью взаимодействия газ—межфазная поверхность, а также конкретным физическим содержанием задачи: условием непротекания для непроницаемой поверхности, функцией распределения молекул, вылетающих из конденсированной фазы в процессе испарения (сублимации), в задачах испарения—конденсации и т. д.

При обтекании тел безграничным потоком ставится условие стремления функции распределения к решению уравнения Больцмана, описывающему состояние газа, не возмущенное обтекаемыми телами. Как правило в качестве такого решения принимается равновесное максвелловское распределение.

2.6. Методы решения

За прошедшие более чем сто лет работы с кинетическим уравнением Больцмана создано и развито несколько аналитических и численных методов его решения. Некоторые из этих методов, будучи весьма популярны в прошлом, сейчас менее актуальны, другие наоборот в настоящее время активно совершенствуются и развиваются. Ниже кратко рассмотрены далеко не все применяемые в современной практике методы решения кинетического уравнения. Более подробную информацию можно найти в уже цитированных изданиях.

1. Метод прямого статистического моделирования (ПСМ, в англоязычной литературе: DSMC: direct simulation Monte Carlo) реализуется на ЭВМ. Основная идея метода — представление реальных физических процессов с молекулами газа определенными процедурами, выполняемыми ЭВМ, с числами, описывающими скорости и координаты этих молекул.

При этом громадное число молекул реального газа заменяется относительно небольшим (порядка нескольких тысяч) числом шаров значительно большего диаметра. Этот диаметр выбирается так, чтобы сохранить среднюю длину свободного пробега. Столкновение молекул моделируется как мгновенный случайный переход системы $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_N)$ из состояния C в состояние C' , где $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_N$ — скорости молекул.

Бесконечное физическое пространство разбивается на ячейки малого объема V . Время разбивается на интервалы величиной Δt так, что в текущий момент α время представляется как $t_\alpha = \alpha \Delta t$. Таким образом в момент времени t_α в ячейке с номером j находится $N(\alpha, j)$ частиц со скоростями $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_{N(\alpha, j)})$.

Алгоритм моделирования как правило состоит из двух этапов. На первом из них моделируется столкновение как случайный переход системы C $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_N)$ в состояние C' , т. е. определяются скорости частиц после столкновений. Координаты в физическом пространстве при этом не меняются. На втором этапе моделируются перемещения молекул с новыми скоростями, т. е. вычисляются координаты молекул, в которых они окажутся через время Δt , двигаясь со скоростями \vec{C}_i' . Здесь моделируется и взаимодействие частиц с физическими границами.

К достоинствам метода следует отнести то, что с его помощью возможно решение нестационарных многомерных (двух и трехмерных) задач. Преимуществом схемы статистического моделирования, как отмечается в [8], является то, что здесь используется сетка случайных узлов в пространстве скоростей, которая адаптируется к задаче. Интуитивно ясна приспособленность такого подхода для аппроксимации на кинетическом уровне точности, поскольку здесь происходит «сгущение узлов» сетки в тех областях пространства скоростей, где значения функции распределения наиболее велики. Это позволяет получить правдоподобные результаты при малой точности счета в достаточно сложных задачах и при этом не требуется очень большой памяти.

Основной недостаток метода состоит в том, что непосредственно из кинетического уравнения Больцмана он не следует, хотя в последнее время математическая обоснованность метода значительно возросла. Важное обстоятельство при

реализации метода — зависимость точности результата от количества частиц в ячейке; для достижения высокой точности требуется большое число частиц, что приводит к увеличению времени счета.

2. Метод прямого численного решения кинетического уравнения Больцмана. Подробное изложение метода представлено в монографии [8]. Ниже же приводятся лишь основные этапы реализации метода прямого численного решения кинетического уравнения Больцмана.

А. Реальное физическое пространство разбивается на ячейки конечного объема V . Время разбивается на конечные интервалы Δt .

Б. Для каждой точки физического пространства и времени задается в виде чисел, соответствующих определенным точкам трехмерного пространства скоростей, начальное приближение функции распределения f . На этом этапе пространство скоростей с бесконечными пределами заменяется ограниченной областью. Как правило это ограничение определяется несколькими тепловыми скоростями. Выделенная таким образом область пространства разбивается на ячейки конечного объема, т. е. принимается определенная трехмерная скоростная сетка. Каждому узлу этой сетки ставится в соответствие некоторое число, задающее начальное приближение функции распределения для этого узла $f(\vec{\xi}_{ijk})$.

В. Записывается конечноразностный аналог кинетического уравнения Больцмана. Например для одномерной задачи этот аналог имеет вид

$$\frac{\Delta f_t}{\Delta t} = -\xi_x \frac{\Delta f_x}{\Delta x} + J, \quad (2.37)$$

где $\Delta f_t = f^{l+1} - f^l$; $\Delta f_x = f'_{n+1} - f'_n$. Здесь индексы n и l обозначают номера ячеек по координате x и по времени. Уравнение (2.37) записывается, а затем решается для каждой точки пространства скоростей, т. е. для каждой точки ξ_{xi} , ξ_{yj} , ξ_{zk} , где i, j, k — соответственно номера ячеек в этом пространстве. Таким образом выражение (2.37) определяет систему $i+j+k$ уравнений.

Г. Система (2.37), сформулированная в п. В, решается численно. Наиболее сложный этап при этом — вычисление интеграла столкновений. Так как этот интеграл пятимерный, его расчет с хорошей точностью при приемлемом для ЭВМ числе узлов сетки пространства интегрирования осуществля-

ется методом Монте-Карло. В соответствии с этим методом интегралы заменяются суммами Монте-Карло по случайной выборке пяти величин (ξ, b, ε) , где b — прицельное расстояние; ε — угловой параметр взаимодействия. Подробное рассмотрение этого способа вычисления интеграла столкновений см. [8].

Далее для решения системы (2.37) может быть использован нестационарный консервативный метод, подразделяющийся на три этапа:

свободномолекулярный разлет, когда не учитываются столкновения молекул;

пространственно-однородная релаксация, учитывающая столкновения молекул, для фиксированных точек физического пространства;

коррекция функции распределения, обеспечивающая выполнение законов сохранения.

Д. Организуется итерационный процесс, позволяющий получить с требуемой точностью искомую функцию распределения.

Е. Определение макропараметров (плотности, компонент тензора давления, температуры, потоков энергии, тепла и др.) путем вычисления тройных сумм функций распределения с соответствующими весами. Например, плотность ρ находится следующим образом:

$$\rho = m \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N f(\xi_{xi}, \xi_{yj}, \xi_{zk}) \Delta \xi_x \Delta \xi_y \Delta \xi_z. \quad (2.38)$$

Завершая рассмотрение метода прямого численного решения уравнения Больцмана, следует отметить, цитируя [8], что этот метод «характеризуется априорным заданием ограниченной области в пространстве скоростей и фиксированной сеткой узлов. С возрастанием этой области возрастает объем памяти и объем вычислений. Но фиксированная сетка скоростей позволяет значительно экономнее организовать вычислительный процесс на однопроцессорных машинах и добиться почти идеального распараллеливания на многопроцессорных компьютерах. Равномерная скоростная сетка улучшает также статистические свойства алгоритма, при вычислении интегралов столкновений методом Монте-Карло, а при использовании консервативных схем для достижения требуемой точности часто достаточно не слишком большого числа узлов».

3. Методы разложения по малому параметру ε .
Решение ищется в виде ряда

$$f = f^{(0)} + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots, \quad (2.39)$$

где $f^{(0)}$ — максвелловское равновесное распределение. В качестве малого параметра используется либо $1/Kn$ при $Kn \gg 1$, либо Kn при $Kn \ll 1$. Для последнего случая, если ограничиться конечным числом членов ряда (2.39), то при задании в начальный момент времени гидродинамических величин в физическом пространстве, представляется возможным исключить из описания функцию распределения и установить прямую взаимосвязь между гидродинамическими величинами в различные моменты времени. Установление этой взаимосвязи и получение замкнутой системы гидродинамических уравнений является целью метода Чепмена—Энскога.

Если вместо (2.39) положить

$$f = f^{(0)} + Kn f^{(1)}, \quad (2.40)$$

то искомая система гидродинамических уравнений будет представлять собой уравнения Навье—Стокса; если сохранить три члена в разложении (2.39), т. е. считать, что

$$f = f^{(0)} + Kn f^{(1)} + Kn^2 f^{(2)}, \quad (2.41)$$

то соответствующая гидродинамическая система будет системой уравнений Барнетта и т. д. Ясно, что при $f = f^{(0)}$ система гидродинамических уравнений есть уравнения Эйлера.

Рассмотренные методы разложения по малому параметру предлагают таким образом «гидродинамический» язык описания течений, характеризующихся небольшим отклонением от равновесия.

4. Интегральные методы решения. Уравнение Больцмана рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно f :

$$\frac{df}{dt} = J(t, f). \quad (2.42)$$

Считая временно функцию f , входящую в J , известной, можно записать решение линейного уравнения

$$f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = f(t_0, \vec{x} - \vec{\xi}(t - t_0), \vec{\xi}) + \int_{t_0}^t J(s, \vec{x} - \vec{\xi}(t - s), \vec{\xi}) ds.$$

Так как правая часть последнего уравнения содержит искомую функцию f , то это уравнение можно рассматривать как интегральное уравнение относительно f . Путь отыскания решения интегрального уравнения — метод итераций. Сходимость метода для конечного интервала времени доказана лишь для пространственно-однородного случая и молекул с конечным радиусом взаимодействия.

5. Модельные уравнения. Наряду с уравнением БГК, рассмотренным выше, в [7] дан регулярный метод построения уточняющихся моделей. Там же предложен способ исправления числа Прандтля, равного в соответствии с уравнением Крука единице. Несмотря на приближенный характер получаемых решений, модельные (релаксационные) уравнения в силу своей простоты могут быть полезны на начальном этапе исследования новых задач о течении разреженных газов.

6. Моментный метод. Моментный метод является приближенным методом решения кинетического уравнения Больцмана. Суть его сводится к замене этого уравнения системой моментных уравнений. Строго говоря, уравнению Больцмана эквивалентна система бесконечного числа моментных уравнений, поэтому степень грубости моментного метода тем больше, чем короче система моментных уравнений.

Алгоритм реализации моментного метода сводится к следующему.

А. Выбирается аппроксимация функции распределения. Выбор аппроксимации — пожалуй наиболее ответственный этап реализации метода. Этот выбор должен с одной стороны учитывать физические особенности рассматриваемой задачи, с другой аппроксимация не должна быть слишком сложной, так как это приведет к громоздкой системе моментных уравнений.

Следуя [4], будем называть аппроксимацию приспособленной к граничным условиям, если при значении координат, определяющих положение межфазных поверхностей, функция распределения для летящих от границы раздела фаз молекул совпадает с функцией, определенной по принятой аппроксимации.

Количество параметров, задающих аппроксимацию функции распределения, определяет число уравнений в моментной системе, построенной на принятой аппроксимации и соответствующей исходному уравнению Больцмана.

Б. Принимается потенциал взаимодействия молекул, для которого планируется получить решение.

В. Выбираются функции $\varphi(\vec{\xi})$, на которые далее будут умножаться обе части уравнения Больцмана для получения соответствующей ему системы моментных уравнений. Количество функций $\varphi(\vec{\xi})$ должно равняться числу неизвестных параметров аппроксимации функции распределения. Для удобства решения системы моментных уравнений в качестве части функций принимаются сумматорные инварианты столкновений (см. разд. 2.2).

Г. Обе части уравнения Больцмана умножаются на выбранные в предыдущем пункте функции $\varphi(\vec{\xi})$.

Д. Обе части полученных в п. Г уравнений интегрируются по $\vec{\xi}$ от $-\infty$ до $+\infty$. Таким образом получается система моментных уравнений. При этом вычисление моментов от интеграла столкновений для максвелловских молекул (см. разд. 1.1, п. Б) удастся выполнить аналитически, причем при любой сколь угодно значительной степени неравновесности исследуемого процесса. В этом собственно и состоит основное достоинство такого потенциала взаимодействия и именно этим обусловлено его введение Дж. К. Максвеллом в практику расчетов моментов интеграла столкновений (подробней см. [9] или [3]). Необходимо отметить, что в последнее время (1991—1993) появились работы [10], в которых предложен метод расчета моментов интеграла столкновений в линеаризованном случае для молекул в виде упругих шаров и двухсторонней максвелловской аппроксимации функции распределения.

Е. Для системы уравнений, полученной в п. Д, формулируются начальные и граничные условия.

Ж. Полученная в п. Д система уравнений, а в п. Е начальные и граничные условия приводятся к безразмерному виду.

З. Система уравнений, сформулированная в п. Д с начальными и граничными условиями, полученными в п. Е, Ж, решается аналитически или численно. Аналитическое решение как правило удастся получить для линейных задач и аппроксимаций с небольшим числом неизвестных параметров (моментов).

И. По найденному решению определяется функция распределения и необходимые макропараметры, как моменты функции распределения.

К. Выполняется анализ полученных решений.

Для уточнения решения и оценки степени пригодности выбранной аппроксимации п. В—К повторяются для отличной от первоначальной системы функций $\varphi(\vec{\xi})$, задаваемых в п. В. Если решения для двух систем $\varphi(\vec{\xi})$ близки друг к другу, то это говорит о хорошем выборе аппроксимации функции распределения, осуществленном в п. А.

В заключение целесообразно попытаться усовершенствовать принятую аппроксимацию функции распределения. Например, если решение было получено для разрывной четырехмоментной аппроксимации, то следующий шаг в направлении усложнения и увеличения гибкости аппроксимации может состоять в принятии шестимоментного разрывного приближения. Как правило это приводит к усложнению решения системы моментных уравнений, однако в случае успеха дает возможность выделить в зависимости от физического содержания задачи основные и второстепенные моменты аппроксимации функции распределения.

Достоинство моментного метода — его относительная простота. Например при грубой разрывной четырехмоментной аппроксимации функции распределения система уравнений сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению даже для существенно неравновесных задач. В случае же линейной постановки удается получить аналитическое решение для шести- и восьмимомментного разрывного приближения [11]. Другая положительная черта моментного метода — возможность получить решение при сколь угодно малом значении числа Кнудсена $Kn = l/L$, где l — длина свободного пробега; L — характерный размер задачи (по крайней мере для максвелловских молекул).

Недостаток моментного метода состоит в его приближенности. Для высокой точности решения необходимо иметь высокомоментную аппроксимацию функции распределения, что приводит к системе моментных уравнений с большим числом уравнений. Возникает проблема решения этой системы, определения областей существования решений, доказательства его единственности и устойчивости. Отмеченная трудность естественно возрастает при решении многомерных задач.

Завершая изложение моментного метода, в качестве рекомендаций по его применению стоит отметить следующее. Моментный метод целесообразно использовать на начальном этапе решения задачи, когда даже грубая аппроксимация

функции распределения дает полезную информацию о физическом содержании изучаемых процессов. Актуальность моментного метода, по-видимому, может быть высокой при исследовании существенно неравновесных течений газа (пара) вблизи межфазной поверхности в континуальном (сплошном) режиме, т. е. при $Kn \ll 1$, особенно при одномерном движении газа во внешней (газодинамической) области. С другой стороны получение простых соотношений для потоков массы, импульса, энергии в свободномолекулярном пределе, т. е. при $Kn \gg 1$, только из уравнений сохранения, т. е. первых уравнений моментной системы, может рассматриваться как пример плодотворности применения моментного метода при хорошем знании аппроксимации функции распределения.

3. РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ЗАДАЧ ЭНЕРГОМАССОПЕРЕНОСА

3.1. Стационарная одномерная переконденсация

Получение системы уравнений

Переконденсацией называется процесс испарения (сублимации) одной конденсированной фазы (Γ на рис. 3.1) и конденсации образовавшегося пара на другой конденсированной фазе (X на рис. 3.1).

Известны температуры межфазных поверхностей T_Γ и T_X и расстояние между конденсированными фазами L . Требуется определить плотность потока массы j в этой задаче, а также найти зависимость плотности и температуры пара от x , т. е. $\rho(x)$ и $T(x)$.

Необходимо отметить, что по постановке задачи известны равновесные плотности пара ρ_Γ и ρ_X , соответствующие по линии насыщения температурам T_Γ и T_X . Таким образом известны и числовые плотности n_Γ и n_X , так как, $\rho_\Gamma = mn_\Gamma$ и $\rho_X = mn_X$. Согласно алгоритму моментного метода (разд. 2.6, п. 6) прежде всего задают аппроксимацию функции распределения.

Основная физическая особенность рассматриваемой задачи переконденсации состоит в том, что движение пара между границами раздела фаз формируется двумя встречными по-

токами молекул, каждый из которых образован в результате испарения из соответствующей конденсированной фазы. Общепринято считать, что при испарении вещества функция распределения пара является максвелловской для молекул, движущихся от межфазной поверхности. Причем температура этого максвеллиана — это температура границы раздела фаз T_s , а концентрация — соответствующая T_s равновесная числовая плотность по линии насыщения n_s . Таким образом известен вид функции распределения для $\xi_x > 0$ при $x=0$ и $\xi_x < 0$ при $x=L$, т. е. сечения функции распределения при $\xi_y = \xi_z = 0$ имеют вид, представленный на рис. 3.2.

При $x=0$ для $\xi_x < 0$ и при $x=L$ для $\xi_x > 0$ вид функции распределения неизвестен и определяется в результате решения кинетического уравнения. Учитывая отмеченную выше специфику формирования движения пара в пространстве $0 < x < L$ и вид функции распределения при $x=0$ и $x=L$, предлагается следующая разрывная по ξ_x аппроксимация функции распределения

$$f = \begin{cases} f_1 = n_1(x) \left(\frac{1}{2\pi RT_1(x)} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_1(x)} \right\}, & \xi_x > 0 \\ f_2 = n_2(x) \left(\frac{1}{2\pi RT_2(x)} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_2(x)} \right\}, & \xi_x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Входящие в (3.1) четыре неизвестные функции x $n_1(x)$, $n_2(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ определяют значение f в каждой точке парового (газового) пространства. По числу неизвестных n_1 , n_2 , T_1 , T_2 аппроксимацию (3.1) называют четырехмоментной. По постановке задачи $n_1 = n_r$, $T_1 = T_r$ при $x=0$, а $n_2 = n_x$, $T_2 = T_x$ при $x=L$.

По мере увеличения x вид функции распределения изменяется. Эти изменения обусловлены столкновениями молекул друг с другом. При отсутствии столкновений функция распределения молекул, движущихся в положительном по x направлении, при любом x была бы такой, как показано в левой части рис. 3.2, а в отрицательном по x направлении — в правой части рис. 3.2. Схематично изменение функции распределения с ростом x иллюстрирует рис. 3.3. Таким образом система моментных уравнений, заменяющая в данном методе кинетическое уравнение Больцмана, должна состоять из четырех уравнений, в результате решения которых определяются функции $n_1(x)$, $n_2(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.

На следующем этапе необходимо принять потенциал взаимодействия молекул. Наиболее удобен при вычислении момента интеграла столкновений потенциал максвелловских молекул. Этот потенциал «мягче» реального взаимодействия, близкого к потенциалу Леннарда—Джонса (см. рис. 1.2, 1.3).

Потенциал твердых шаров «жестче» реального. Следовательно, решение для реального потенциала должно находиться между решениями для максвелловских молекул и твердых шаров. Таким образом плодотворным представляется получение решений для этих двух потенциалов. Вычисление моментов интеграла столкновений хорошо разработано. Итоговые соотношения такого расчета используются ниже при нахождении решения рассматриваемой задачи. Пример вычисления моментов интеграла столкновений в линеаризованных задачах для твердых шаров приведен в [10]. Ниже рассматривается расчет, выполненный только для максвелловских молекул, т. е. считается, что молекулы взаимодействуют по закону

$$U = K/r^4, \text{ или } F = K_1/r^5, K_1 = 4K. \quad (3.2)$$

Реализуется п. В алгоритма моментного метода. Выбираем в качестве первых трех функций $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ инварианты столкновений, т. е. $\varphi_1 = m$, $\varphi_2 = m\xi_x$, $\varphi_3 = m\xi_x^2/2$, в качестве φ_4 принимаем $\varphi_4 = m\xi_x \vec{\xi}^2$. Прежде чем переходить к п. Г алгоритма введем, следуя Д. А. Лабунцову, для удобства следующие обозначения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi} = \langle 1 \rangle; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f d\vec{\xi} = \langle \xi_x \rangle; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 f d\vec{\xi} = \langle \xi_x^2 \rangle; \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x \vec{\xi}^2 f d\vec{\xi} = \langle \xi_x \vec{\xi}^2 \rangle; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 \xi_x f d\vec{\xi} = \langle \xi_x^3 \rangle \text{ и т. д.}$$

Уравнение Больцмана в рассматриваемой одномерной задаче имеет вид

$$\xi_x \frac{df}{dx} = J. \quad (3.4)$$

Реализуя последовательно для этого уравнения п. Г и Д алгоритма, имея в виду обозначения (3.3) и учитывая, что при этом дифференцирование осуществляется по переменной

x , а интегрирование по переменной $\vec{\xi}$, получим следующую систему моментных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d(m \langle \xi_x \rangle)}{dx} &= 0; \\ \frac{d(m \langle \xi_x^2 \rangle)}{dx} &= 0; \\ \frac{d(m \langle \xi_x \vec{\xi}^2 / 2 \rangle)}{dx} &= 0; \\ \frac{d(m \langle \xi_x^2 \vec{\xi}^2 \rangle)}{dx} &= I(m \vec{\xi}_x \vec{\xi}^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При вычислении правых частей первых трех уравнений учтено, что $\varphi_1 - \varphi_3$ — инварианты столкновений и в соответствии с разд. 2.2 ((2.4а), (2.4б)) в этом случае моменты от интеграла столкновений равны нулю. Первые три уравнения системы (3.5) представляют собой уравнения сохранения, они могут быть легко проинтегрированы. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \langle \xi_x \rangle &= j_x / m; \\ \langle \xi_x^2 \rangle &= \Pi_{xx} / m; \\ \langle \xi_x \vec{\xi}^2 / 2 \rangle &= E_x / m; \\ \frac{d}{dx} \langle \xi_x^2 \vec{\xi}^2 \rangle &= I(\xi_x \vec{\xi}^2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где j_x, Π_{xx}, E_x — постоянные интегрирования, они же соответственно плотности потоков массы, импульса, энергии. Для решения системы (3.6) необходимо вычислить моменты функции распределения (3.1) и момент интеграла столкновений $I(\xi_x \vec{\xi}^2)$.

Для функции (3.1) любой момент функции распределения представляется собой сумму двух интегралов, один из которых берется в положительном по ξ_x полупространстве, а другой в отрицательном. Например момент $\langle \xi_x \rangle$ может быть записан как

$$\langle \xi_x \rangle = \langle \xi_x \rangle_+ + \langle \xi_x \rangle_-, \quad (3.7)$$

$$\text{где } \langle \xi_x \rangle_+ = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 \xi_x d\vec{\xi}, \text{ а } \langle \xi_x \rangle_- = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2 \xi_x d\vec{\xi}. \quad (3.8)$$

Следует подчеркнуть, что функция распределения является разрывной только по переменной ξ_x , интегрирование по ξ_y и ξ_z осуществляется от $-\infty$ до $+\infty$, что и отмечено в записи интегралов (3.8). Выражения для других моментов аналогичны соотношениям (3.7), (3.8).

Для функции (3.1) как $\langle \rangle_+$, так и $\langle \rangle_-$ приводятся к интегралам типа $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx$ или $\int_{-\infty}^0 x^n e^{-\alpha x^2} dx$. Значения таких интегралов приведены в Приложении 2. Пользуясь этим приложением, вычислим правые части уравнений (3.6) и перепишем систему (3.6). Для компактности сейчас и далее будем опускать аргумент x при записи функций $n(x)$ и $T(x)$:

$$\begin{aligned} n_1 \sqrt{RT_1/2\pi} - n_2 \sqrt{RT_2/2\pi} &= j_x/m; \\ {}^{1/2}n_1 RT_1 + {}^{1/2}n_2 RT_2 &= \Pi_{xx}/m; \\ 2RT_1 \sqrt{RT_1/2\pi} - 2RT_2 \sqrt{RT_2/2\pi} &= E_x/m; \\ \frac{d}{dx} (n_1^{5/2} (RT_1)^2 + n_2^{5/2} (RT_2)^2) &= I(\xi_x \vec{\xi}^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В настоящем разделе нет возможности подробно изложить методику вычисления момента от интеграла столкновений $I(\xi_x \vec{\xi}^2)$ для максвелловских молекул. Необходимо тем не менее отметить, что упрощение вычисления таких моментов для этого потенциала достигается за счет того, что удается разделить переменные при интегрировании. Точнее говоря, отдельно может быть вычислен интеграл по b и ϵ с $|\vec{g}| b \times \times \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$ в качестве подинтегральной функции. Именно

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |\vec{g}| b \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta db d\epsilon = A_2 \sqrt{K_1/2m}, \quad \text{где } A_2 = 1,3682; \quad (3.10)$$

$I(\xi_x \vec{\xi}^2)$ в соответствии с (2.46) приводится к виду

$$\begin{aligned} I(\xi_x \vec{\xi}^2) &= {}^{1/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |\vec{g}| b db d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi'_x \xi'^2 + \xi'_{x1} \xi'^2 - \\ &\quad - \xi_x \xi^2 - \xi_{x1} \xi_1^2) ff_1 d\xi_1 d\vec{\xi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подинтегральное выражение в (3.11) с помощью теоремы о сферических гармониках [12] приводится к виду $-{}^{3/2}\Phi(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1) ff_1 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$, т. е. (3.11) с учетом (3.10) преобразуется в

$$I(\xi_x \vec{\xi}^2) = -{}^{3/4} A_2 \sqrt{K_1/2m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1) ff_1 d\vec{\xi} d\vec{\xi}_1. \quad (3.12)$$

Функция $\Phi(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1)$ в (3.12) содержит только аргументы, по которым проводится интегрирование, что позволяет его достаточно просто выполнить. Для f , определяемой соотношением (3.1), такое интегрирование дает (см. в Приложении 1 (П. 1.27))

$$I(\vec{\xi}_x, \vec{\xi}^2) = -4 \frac{A_2}{m} \sqrt{K_1/2m} \left(E_x \frac{\rho}{m} - {}^{5/2}j_x \frac{\Pi_{xx}}{m} \right). \quad (3.13)$$

Система четырех уравнений (3.9) с $I(\vec{\xi}_x, \vec{\xi}^2)$, определенным выражением (3.13), содержит четыре неизвестные функции $n_1(x)$, $n_2(x)$, $T_1(x)$ и $T_2(x)$.

В соответствии с алгоритмом моментного метода запишем граничные условия для этих функций (п. Е алгоритма):

$$n_1(0) = n_r; T_1(0) = T_r; n_2(L) = n_x; T_2(L) = T_x. \quad (3.14)$$

Обезразмеривание системы (3.9) выполняется путем деления обеих частей уравнений на произведение типа $n_6(RT_6)^n$, где n_6 и T_6 — базовая концентрация и температура. В качестве базовых могут быть выбраны, например, параметры «горячей» или «холодной» поверхности, или любые другие, удобные для конкретных прикладных расчетов значения концентрации и температуры. Введем следующие обозначения безразмерных величин:

$$n_1' = n_1/n_6; n_2' = n_2/n_6; T_1' = T_1/T_6; T_2' = T_2/T_6. \quad (3.15)$$

Для обезразмеривания системы (3.9) первое уравнение этой системы разделим на $n_6 \sqrt{RT_6/2\pi}$, второе на $n_6 RT_6/2$, третье на $n_6 2RT_6 \sqrt{RT_6/2\pi}$, четвертое на $n_6 {}^{5/2}(RT_6)^2$. При этом

$$j'_x = \frac{j_x}{n_6 \sqrt{RT_6/2\pi}}; \quad \Pi'_{xx} = 2\Pi_{xx}/\rho_6 RT_6; \\ E'_x = \frac{E_x}{2\rho_6 RT_6 \sqrt{RT_6/2\pi}}. \quad (3.16)$$

Запишем полученную таким образом систему уравнений, опустив сейчас и далее штрихи у безразмерных величин:

$$n_1 T_1^{1/2} - n_2 T_2^{1/2} = j_x; \\ n_1 T_1 + n_2 T_2 = \Pi_{xx}; \\ n_1 T_1^{3/2} - n_2 T_2^{3/2} = E_x; \quad (3.17)$$

$$\frac{d(n_1 T_1 + n_2 T_2)}{dx} = -\frac{16}{5\sqrt{2\pi}} A_2 \sqrt{\frac{K_1}{2m} \frac{n_6}{\sqrt{RT_6}}} \{E_x n - {}^{5/2}j_x \Pi_{xx}\}.$$

Известно [4], что длина свободного пробега выражается для максвелловских молекул через параметры взаимодействия, концентрацию и температуру газа следующим образом:

$$l_6 = \frac{\sqrt{RT_6}}{2\sqrt{2} A_2 \sqrt{K_1/2m n_6}}. \quad (3.18)$$

Необходимо заметить, что длина свободного пробега зависит от того, при каких n и T она рассчитывается. Для значений, соответствующих «горячей» поверхности, эта длина будет иметь одно значение, для «холодной» другое и т. д. Поэтому важно при введении длины свободной поверхности оговаривать для каких параметров она рассчитывается. Высказанное замечание тем актуальней, чем существенней отклонение от равновесия в решаемой задаче. В данном случае индекс «б» у l показывает, что длина свободного пробега рассчитывается для базового состояния газа.

Располагая (3.18), последнее уравнение системы (3.17) можно записать

$$\frac{d(n_1 T_1^2 + n_2 T_2^2)}{dx} = -\frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{l_6} \{E_x n - {}^{5/8} j_x \Pi_{xx}\}. \quad (3.19)$$

Входящая в уравнение (3.19) координата x размерная величина. Если ввести безразмерную координату x' с помощью следующего соотношения $x' = x/L$, то уравнение (3.19) можно привести к виду

$$\frac{d(n_1 T_1^2 + n_2 T_2^2)}{dx'} = -\frac{0,45}{Kn_6} \{E_x n - {}^{5/8} j_x \Pi_{xx}\}, \quad (3.20)$$

где $Kn_6 = l/L$; $0,45 = 4/(5\sqrt{\pi})$. Далее штрих у x' будем опускать. Таким образом первые три уравнения системы (3.17) и уравнение (3.20) представляют собой безразмерную систему, описывающую на приближенном кинетическом уровне процесс одномерной стационарной переконденсации.

Линейная задача

Ниже подробно рассматривается линейная задача переконденсации, впервые решенная в шестимомментном приближении Д. А. Лабунцовым в 1967 году. Линейной будем называть задачу, характеризующуюся малым отклонением от состояния равновесия. В данном случае это значит что

$(n_1 - n_2)/n_1$ или $(n_1 - n_2)/n_2 \ll 1$ и $(T_1 - T_2)/T_1 \ll 1$. В таких задачах может быть введен малый параметр, по которому затем проведена линейризация, т. е. замена нелинейных в общем случае функций их линейным приближением.

Например, если t — малый параметр, то $(1+t)^n \cong 1+nt$ и т. п. В линейной постановке функции n_1, T_1, n_2, T_2 могут быть выражены через $t_1(x), t_2(x), N_1(x), N_2(x)$, где $t_1(x) \ll 1, t_2(x) \ll 1, N_1(x) \ll 1, N_2(x) \ll 1$, следующим образом:

$$n_1 = 1 + N_1; \quad n_2 = 1 + N_2; \quad T_1 = 1 + t_1; \quad T_2 = 1 + t_2. \quad (3.21)$$

Подстановка соотношений (3.21) в систему (3.17), (3.20) и последующая линейризация приводят эту систему к виду

$$N_1 + t_1/2 - (N_2 + t_2/2) = j_x; \quad (3.22a)$$

$$2 + N_1 + t_1 + N_2 + t_2 = \Pi_{xx}; \quad (3.22б)$$

$$N_1 + 3/2 t_1 - (N_2 + 3/2 t_2) = E_x; \quad (3.22в)$$

$$\frac{d(N_1 + 2t_1 + N_2 + 2t_2)}{dx} = -(0,45/Kn_0) [E_x - 5/4 j_x]. \quad (3.22г)$$

При получении правой части (3.22г) учтено, что для функции (3.1) в соответствии с определением (1.9) $n = 1/2(n_1 + n_2)$, а в линейном варианте

$$n = 1 + (N_1 + N_2)/2. \quad (3.23)$$

Произведение $E_x n$ в соответствии с (3.22в) и (3.23) преобразуется следующим образом:

$$E_x n = N_1 + 3/2 t_1 - (N_2 + 3/2 t_2) + \{ [N_1 + 3/2 t_1 - (N_2 + 3/2 t_2)] (N_1 + N_2)/2 \}. \quad (3.24)$$

Выражение в фигурных скобках в (3.24) представляет собой бесконечно малую функцию более высокого порядка чем $N_1 + 3/2 t_1 - (N_2 + 3/2 t_2)$. Пренебрегая бесконечно малыми 2, 3 и т. д. порядка, получим из (3.24)

$$E_x n = N_1 + 3/2 t_1 - (N_2 + 3/2 t_2), \quad \text{т. е. } E_x n = E_x. \quad (3.25)$$

Аналогично из (3.22а) и (3.22б) следует $j_x \Pi_{xx} = 2j_x$.

Граничные условия для системы (3.22) в соответствии с (3.14), (3.15), (3.21) в линейной постановке имеют вид

$$N_1(0) = N_r; \quad t_1(0) = t_r; \quad N_2(1) = N_x; \quad t_2 = t_x. \quad (3.26)$$

«Холодная» поверхность в безразмерных координатах расположена на $x=1$, поэтому N_2 и t_2 взяты при $x=1$.

Решение системы (3.22) с граничными условиями (3.26) осуществляется следующим образом: Из (3.22а) и (3.22в)

$$t_1 - t_2 = E_x - j_x, \text{ или } t_2 = t_1 - E_x + j_x; \quad (3.27)$$

$$N_1 - N_2 = (3j_x - E_x)/2, \text{ или } N_2 = N_1 - 3/2 j_x + E_x/2. \quad (3.28)$$

Подстановка (3.27) и (3.28) в (3.22б) дает возможность выразить N_1 из этого уравнения как

$$N_1 = \Pi_{xx}/2 - t_1 - 1 + E_x/4 + j_x/4. \quad (3.29)$$

Выражения (3.27) — (3.29) позволяют выразить N_1 , N_2 , t_2 через t_1 . Подставив эти выражения в (3.22г), получим

$$2 \frac{dt_1}{dx} = - \frac{0,45}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\}. \quad (3.30)$$

Интегрирование (3.30) дает, имея в виду $E_x - 5/4 j_x = \text{const}$:

$$t_1 = - \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} x + C, \quad (3.31)$$

где C — постоянная интегрирования. Подставив граничное условие $t_1(0) = t_r$ в (3.31), найдем эту постоянную $C = t_r$. Таким образом решение (3.31) примет вид

$$t_1 = t_r - \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} x. \quad (3.32)$$

Постоянные интегрирования E_x и j_x (они же плотности потоков энергии и массы) находятся из оставшихся граничных условий (3.26) следующим образом. Из (3.27) и (3.32)

$$t_2 = t_r - \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} x - E_x + j_x. \quad (3.33)$$

В силу (3.26) $t_2 = t_x$ при $x=1$. Таким образом из (3.33)

$$t_x = t_r - \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} - E_x + j_x, \quad (3.34)$$

или

$$t_r - t_x = \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} + E_x - j_x. \quad (3.35)$$

Из (3.29) и (3.32)

$$N_1 = \Pi_{xx}/2 - t_r + \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} x - 1 + E_x/4 + j_x/4. \quad (3.36)$$

Из $N_1(0) = N_r$ и (3.36)

$$N_r = \Pi_{xx}/2 - t_r - 1 + E_x/4 + j_x/4. \quad (3.37)$$

Из $N_2(1) = N_x$, (3.28), (3.29) и (3.32)

$$N_x = \Pi_{xx}/2 - t_r + \frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} - 1 + 3/4 E_x - 5/4 j_x. \quad (3.38)$$

Вычитая из (3.37) (3.38), получим

$$N_r - N_x = -\frac{0,225}{Kn_6} \{E_x - 5/4 j_x\} + 3/2 j_x - E_x/2. \quad (3.39)$$

Обозначим $\Delta t = t_r - t_x$ и $\Delta N = N_r - N_x$. Сложение (3.35) и (3.39) дает

$$\Delta N + \Delta t = E_x/2 + j_x/2, \text{ или } E_x = 2(\Delta N + \Delta t) - j_x. \quad (3.40)$$

Подставив (3.40) в (3.35), получим уравнение относительно j_x . Его решение дает

$$j_x = \frac{\Delta N + \Delta t/2 + (0,225/Kn_6)(\Delta N + \Delta t)}{1 + (9/8)0,225/Kn_6}. \quad (3.41)$$

Формула (3.41) позволяет рассчитывать плотность потока массы при переконденсации для любого значения Kn_6 . Рассмотрим предельные значения j_x , определяемые соотношением (3.41). В свободномолекулярном режиме $Kn_6 \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$j_x = \Delta N + \Delta t/2. \quad (3.42)$$

В размерном виде из (3.42) следует

$$j_x = \rho_r \sqrt{RT_r/2\pi} - \rho_x \sqrt{RT_x/2\pi}. \quad (3.42a)$$

Для континуального предела, т. е. при $Kn_6 \rightarrow 0$

$$j_x = 8/9(\Delta N + \Delta t). \quad (3.43)$$

Размерная форма соотношения (3.43)

$$j_x \text{ разм} = 8/9 \frac{P_r - P_x}{\sqrt{2\pi RT_6}}; \quad T_6 \cong T_r \cong T_x, \quad (3.43a)$$

так как $\Delta N + \Delta t = (P_r - P_x)/P_6$, а $P = \rho RT$.

Сопоставление (3.42) и (3.43) показывает, что при определенном соотношении между ΔN и Δt плотность потока массы в континуальном пределе может быть больше, чем при свободномолекулярном течении, т. е. без столкновений моле-

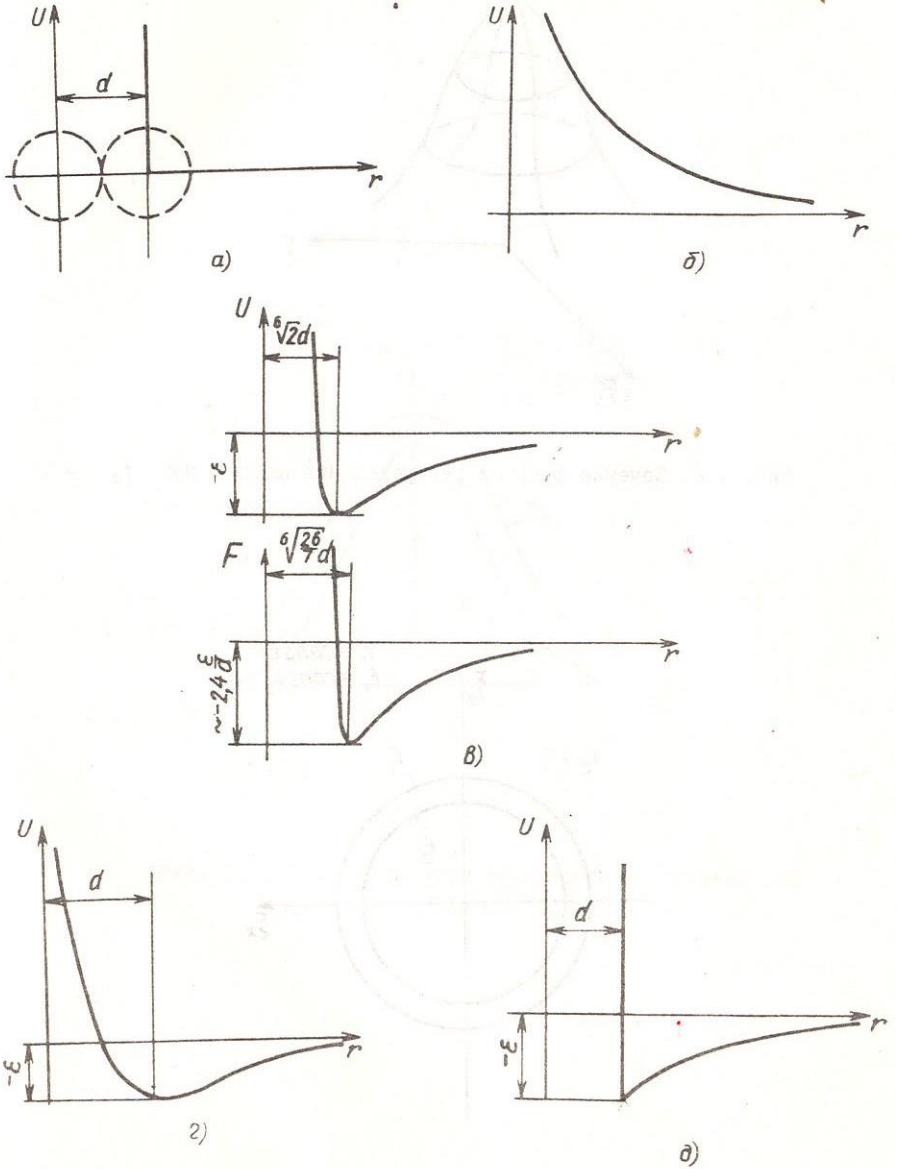


Рис.1.1. Потенциалы взаимодействия молекул:
 а - твердые упругие шары; б - максвелловские молекулы;
 в - Леннарда - Джонса; г - Морзе; д - Сезерленда

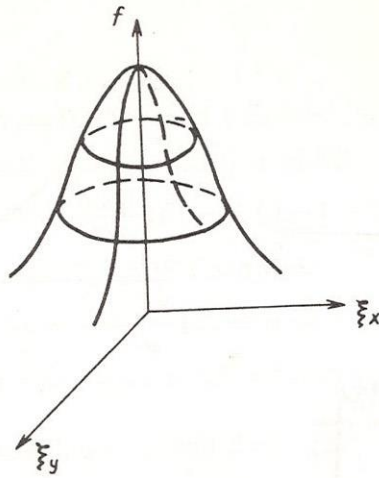


Рис. 1.2. Сечение функции распределения плоскостью $\xi_z = 0$

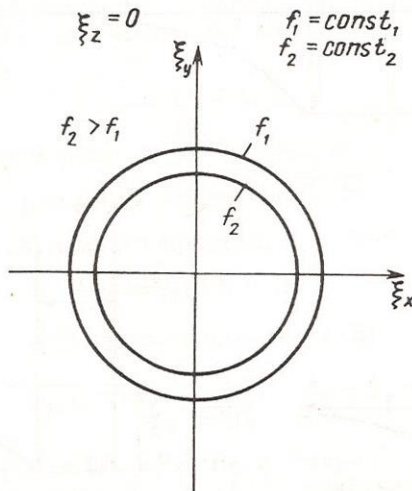


Рис.1.3. Сечение функции распределения плоскостями $\xi_z = 0$ и $f_1 = const_1, f_2 = const_2$

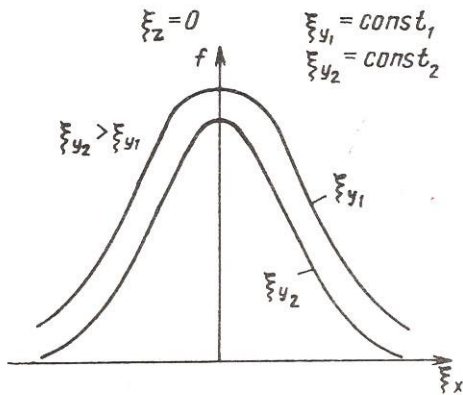


Рис. 1.4. Сечение функции распределения плоскостями $\xi_z = 0$ и $\xi_{y_1} = \text{const}_1, \xi_{y_2} = \text{const}_2$

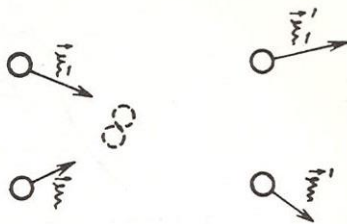


Рис. 2.1. Столкновение двух молекул

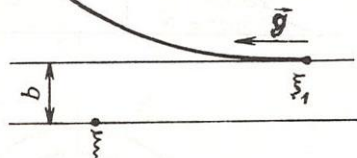


Рис. 2.2. Траектория движения молекулы

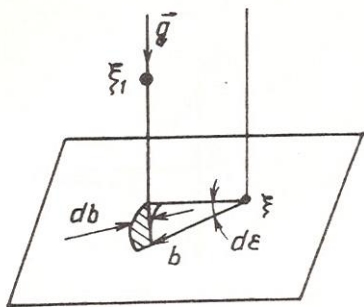


Рис. 2.3. Рассмотрение взаимодействия молекул в цилиндрической системе координат: z, b, ϵ

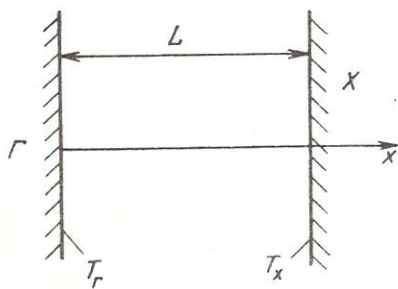


Рис. 3.1. Постановка задачи переCONDENСАЦИИ

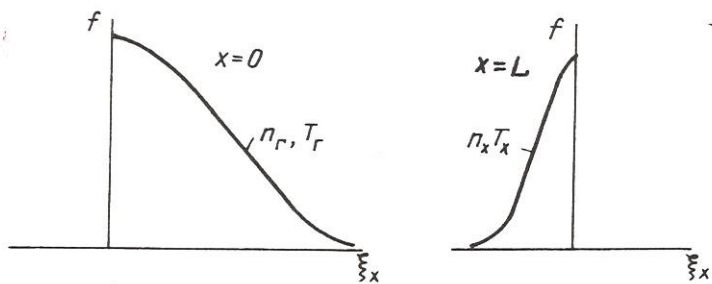


Рис.3.2. Вид функций распределения на "горячей" и "холодной" поверхностях

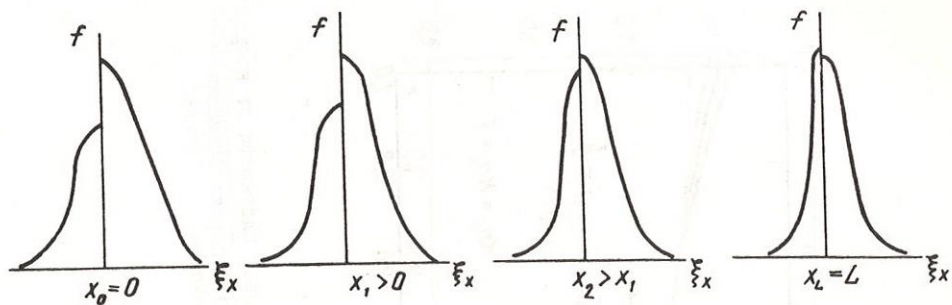


Рис.3.3. Эволюция функции распределения по координате x .

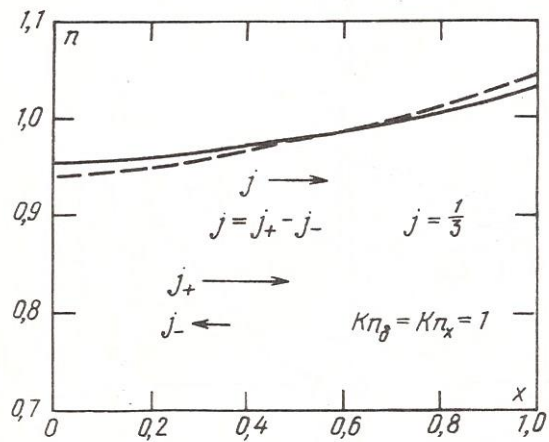


Рис. 3.4. Зависимость числовой плотности от координаты для задачи о нелинейной переконденсации

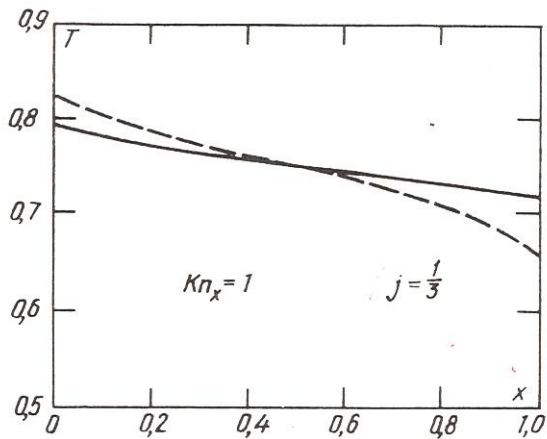


Рис.3.5. Зависимость температуры от координаты для задачи о нелинейной переконденсации

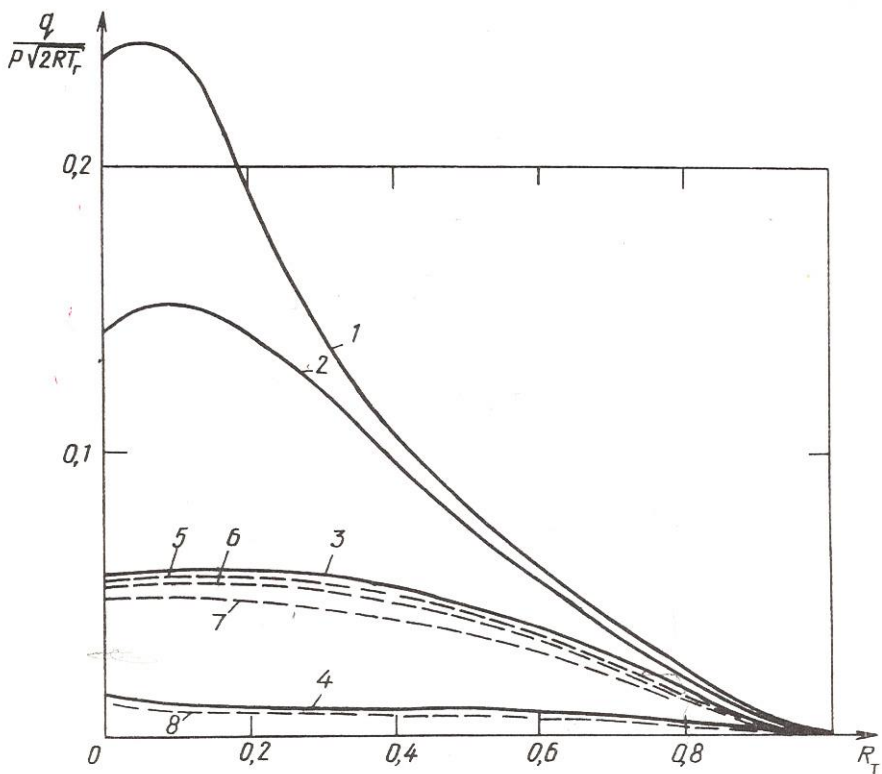


Рис.3.6. Результаты решения нелинейной задачи о теплопереносе через слой газа

1,5 - $K_{n\delta} = 10$; 2,6 - $K_{n\delta} = 1$; 3,7 - $K_{n\delta} = 0,1$;
 4,8 - $K_{n\delta} = 0,01$

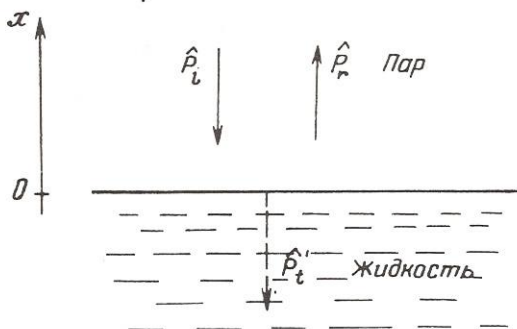


Рис.4.1. Постановка задачи об отражении звука от свободной поверхности жидкости

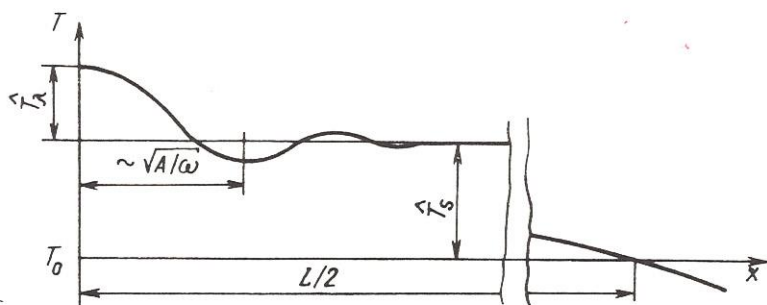


Рис.4.2. Характерное распределение температуры в паре вблизи границы с жидкостью при отражении звуковой волны

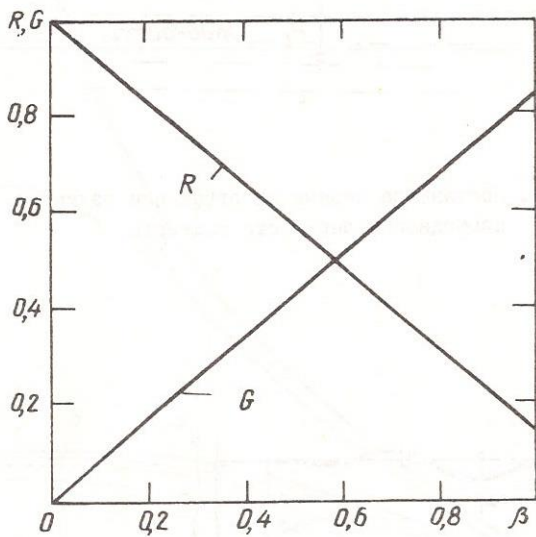


Рис.4.3. Зависимость коэффициентов отражения звука и проницаемости границы раздела фаз от коэффициента конденсации

кул друг с другом. Такая ситуация будет осуществляться при выполнении неравенства

$$\frac{8}{9}(\Delta N + \Delta t) > \Delta N + \Delta t/2. \quad (3.44)$$

После приведения подобных (3.44) принимает вид

$$\Delta N < \frac{7}{2}\Delta t. \quad (3.44a)$$

С другой стороны соотношение между ΔN и Δt определяется производной $\frac{dP}{dT}$ по кривой насыщения. В самом деле, по уравнению Клапейрона—Клаузиуса при низких давлениях:

$$\frac{dP}{dT} = r/T (v'' - v') \cong rP/RT^2.$$

В линейном приближении

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} \cong \frac{rP_6}{RT_6 T_6}. \quad (3.45)$$

Иначе (3.45) может быть записано

$$\frac{(\Delta P/P_6)}{(\Delta T/T_6)} = \frac{r}{RT_6}, \text{ или } \Delta N + \Delta t = \frac{r}{RT_6} \Delta t. \quad (3.46)$$

Из последнего выражения следует, что

$$\Delta N = (r/RT_6 - 1)\Delta t. \quad (3.47)$$

Сравнение (3.47) с (3.44a) приводит к заключению о том, что при

$$\frac{r}{RT_6} - 1 < \frac{7}{2}, \text{ или } \frac{r}{RT_6} < \frac{9}{2}$$

плотность потока массы при переконденсации для $Kn_6 \rightarrow 0$ больше $Kn_6 \rightarrow \infty$. Следовательно, для увеличения плотности потока массы в задачах переконденсации веществ, у которых $\frac{r}{RT_6} > \frac{9}{2}$, целесообразно создание разрежения между конденсированными фазами, т. е. обеспечение условия для увеличения Kn_6 . Напротив, для увеличения j_x при переконденсации веществ с $\frac{r}{RT_6} < \frac{9}{2}$ имеет смысл стремиться к малым значениям Kn_6 , т. е. увеличивать давление в переконденсационном зазоре.

Следует подчеркнуть, что этот вывод оказалось возможным сделать лишь в результате решения кинетического уравнения Больцмана, т. е. получения выражения (3.41). Понятно, что главная содержательная информация этого уравнения сосредоточена в интеграле столкновений, т. е. члене, учитывающем взаимодействие молекул.

Отмеченные выше противоположные выводы для переконденсации различных веществ можно объяснить тем, что при $r/RT_0 < 9/2$ столкновения молекул, находящихся в переконденсационном зазоре, с испарившимися с «холодной» межфазной поверхности частицами отражают назад к этой поверхности достаточно большую часть испарившихся молекул. Эта часть настолько велика, что она превосходит по величине влияние ослабления потока молекул, движущихся от «горячей» поверхности, из-за столкновений с молекулами парового зазора.

Такое отражение молекул к «холодной» поверхности играет тем большую роль, чем ближе друг к другу испарительные потоки для «горячей» и «холодной» межфазных поверхностей. Для большинства веществ из-за сильного увеличения ρ_s с ростом T_s по линии насыщения испарительный поток с «горячей» поверхности существенно превосходит аналогичный поток с «холодной» поверхности. Поэтому торможение «горячего» испарительного потока оказывает большее влияние на величину j_x , чем отражение «холодного» испарительного потока, что приводит к необходимости увеличения Kn_0 при стремлении к росту j_x .

Расчет коэффициента K в зависимости $\Delta N = K\Delta t$, где ΔN и Δt берутся по линии насыщения, показывает, например, следующее. Для гелия $K_{He} \cong 3,9$ при $T_s = 3,9$ К; для аргона $K_{Ar} \cong 9,0$ при $T_s = 100$ К. Поскольку величина K_{He} , в отличие от K_{Ar} , близка к предельному значению $K = 3,5$ (3.44а), постольку уменьшение давления в зазоре при переконденсации гелия будет сказываться на увеличении плотности потока массы значительно слабее, чем при переконденсации аргона.

В заключение этого подраздела получим из соотношения (3.43) формулу для расчета интенсивности испарения — конденсации в (из) полубесконечную среду. Ясно, что такую ситуацию можно получить из переконденсационной задачи при $L \rightarrow \infty$, т. е. $Kn_0 \rightarrow 0$. При этом, например, если рассматривается процесс испарения, то заданными являются T_r , $n_r(P_r)$ и соответствующие параметры при $L \rightarrow \infty$, обозначаемые

мые индексом ∞ , т. е. T_∞ и $n_\infty(P_\infty)$. Для задачи конденсации вместо T_r , n_r задаются T_x , n_x . Для линейных задач в первом приближении $\Delta N = 2(N_r - N_\infty)$ и $\Delta t = 2(t_r - t_\infty)$ при испарении или $\Delta N = 2(N_x - N_\infty)$ и $\Delta t = 2(t_x - t_\infty)$ при конденсации. Для разности же давлений соответственно $P_r - P_x = 2(P_r - P_\infty)$ при испарении. Подстановка перечисленных соотношений в выражения (3.43) дает, например для испарения

$$j_x = 16/9 (N_r - N_\infty + t_r - t_\infty) \quad (3.48)$$

и в размерном виде

$$j_x = 16/9 (P_r - P_\infty) / (2\pi R T_\infty)^{1/2}, \quad (3.48a)$$

так как $T_\infty \cong T_r = T_\infty$.

Замена индекса «г» на индекс «х» в выражениях (3.48) делают эти соотношения пригодными для расчета конденсации из полубесконечного пространства.

Более точное шестимоментное приближение при решении задачи испарения (конденсации) в полубесконечное пространство приводит к результату, отличающемуся от формул (3.48) множителем $5/3 = 15/9$ вместо $16/9$. Столь близкое значение точного множителя $5/3 = 15/9$ к приближенному $16/9$, полученному на основе четырехмоментной аппроксимации (3.1) позволяет утверждать, что это приближение с хорошей для прикладных расчетов точностью учитывает основные физические особенности процессов испарения, конденсации и переконденсации, а соотношения (3.43) и (3.48) могут быть рекомендованы для инженерной практики.

Нелинейная переконденсация

Применение аппроксимации (3.1) для расчета интенсивной переконденсации, реализующейся при $T_k/T_n \ll 1$, позволяет решить моментным методом эту задачу аналитически. Поскольку редко удается получить решение нелинейной задачи аналитически, ниже подробно рассмотрен процесс такого решения.

Решается система, состоящая из трех первых уравнений (3.17) и уравнения (3.20). Из первых двух уравнений выражаются n_1 и n_2 , которые затем подставляются в третье уравнение (3.17). В результате получается

$$j_x T_1^{1/2} T_2^{1/2} + \Pi_{xx} (T_1^{1/2} - T_2^{1/2}) = E_x, \quad (3.49)$$

а также

$$n_1 + n_2 = [\Pi_{xx} + j_x (T_2^{1/2} - T_1^{1/2})] / (T_1^{1/2} T_2^{1/2}). \quad (3.50)$$

Левая часть уравнения (3.20) приводится к виду

$$\begin{aligned} & d/dx \{ j_x T_1^{1/2} T_2^{1/2} (T_1^{1/2} - T_2^{1/2}) + \\ & + \Pi_{xx} [(T_1^{1/2} - T_2^{1/2})^2 + T_1^{1/2} T_2^{1/2}] \}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Для аппроксимации (3.1)

$$n_1 + n_2 = 2n. \quad (3.52)$$

Выражения (3.49), (3.50), (3.52) позволяют выразить $T_1^{1/2} - T_2^{1/2}$ и $T_1^{1/2} T_2^{1/2}$ через $2n$. Подставив выраженные таким образом разность и произведение $T_1^{1/2}$ и $T_2^{1/2}$ в (3.51) и проведя несложные преобразования, получим следующий вид левой части (3.20)

$$\{ [E_x (E_x j_x - \Pi_{xx}^2)] / [\Pi_{xx} j_x] \} \{ d[(a-b)/(b-2n)] / dx \}, \quad (3.53)$$

где $a = j_x \Pi_{xx} / E_x$; $b = j_x^2 / \Pi_{xx}$. В итоге уравнение (3.20) запишется как

$$d[(a-b)/(b-2n)] / dx = A(2n-M), \quad (3.54)$$

где

$$\begin{aligned} M &= 5/4 j_x \Pi_{xx} / E_x; \\ A &= - (0,225 j_x \Pi_{xx}) / [Kn_0 (E_x j_x - \Pi_{xx}^2)] = \\ &= 0,225 ab / [j_x (a-b) Kn_0]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Уравнение (3.54) — уравнение с разделяющимися переменными. Оно может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{(b-M)(b-2n)^2} + \frac{1}{(b-M)^2(b-2n)} + \frac{1}{(b-M)^2(2n-M)} \right\} d(2n) = \\ & = \frac{A}{(a-b)} dx. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Решение (3.56) относительно $2n$ есть

$$\frac{1}{(b-M)(b-2n)} - \frac{1}{(b-M)^2} \ln \left| \frac{b-2n}{2n-M} \right| = \frac{A}{a-b} x + C, \quad (3.57)$$

где C — постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий. В соответствии с (3.14), (3.15) эти условия записываются

$$\begin{aligned} n_1(0) &= n_r; & T_1(0) &= T_r; \\ n_2(1) &= n_x; & T_2(1) &= T_x. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Запишем уравнения сохранения (3.17) и решение (3.57) для $x=0$ и $x=1$:

для $x=0$

$$n_r T_r^{1/2} - n_2(0) [T_2(0)]^{1/2} = j_x;$$

$$n_r T_r + n_2(0) T_2(0) = \Pi_{xx};$$

$$n_r T_r^{3/2} - n_2(0) [T_2(0)]^{3/2} = E_x;$$

$$1/\{(b-M)[b-2n(0)]\} - [1/(b-M)^2] \times \\ \times \ln|[b-2n(0)]/[2n(0)-M]| = C,$$

где $2n(0) = n_r + n_2(0)$;

(3.59)

для $x=1$

$$n_1(1) [T_1(1)]^{1/2} - n_x T_x^{1/2} = j_x;$$

$$n_1(1) T_1(1) + n_x T_x = \Pi_{xx};$$

$$n_1(1) [T_1(1)]^{3/2} - n_x T_x^{3/2} = E_x;$$

$$1/\{(b-M)[b-2n(1)]\} - [1/(b-M)^2] \times \\ \times \ln|[b-2n(1)]/[2n(1)-M]| = C + \frac{A}{(a-b)};$$

где $2n(1) = n_1(1) + n_x$.

При известном Kn_6 система (3.59) замкнута, так как в восьми уравнениях содержится восемь неизвестных: $n_1(1)$, $n_2(0)$, $T_1(1)$, $T_2(0)$, j_x , Π_{xx} , E_x , C . Таким образом, задавая Kn_6 , из (3.59) можно определить все постоянные, в том числе удельные потоки массы j_x , импульса Π_{xx} , энергии E_x .

Наоборот, задавая j_x , из системы (3.59) получим соответствующее значение Kn_6 . Последний подход, очевидно, более удобен, поскольку позволяет определить сначала $T_1(1)$, $T_2(0)$, Π_{xx} , E_x , $2n(1)$, $2n(0)$ из уравнений сохранения системы (3.59), а затем из оставшихся двух логарифмических уравнений Kn_6 . Решение системы уравнений сохранения в общем виде представлено в Приложении 3.

Зная все постоянные, входящие в решение (3.57), можем с помощью последнего построить зависимости $n(x)$, $T(x)$. Для этого в соответствии с определением (1.15) и функцией распределения (3.1) имеем выражение для температуры пара в произвольной точке x

$$T = \frac{\Pi_{xx}}{2n} - \frac{j_x^2}{6n^2}. \quad (3.60)$$

Таким образом для $T_x=0,5 T_r$ и $j_x=1/3$ найдены функции $n(x)$, $T(x)$, изображенные на рис. 3.4 и 3.5 (сплошная линия). Здесь же для сравнения (штриховая линия) представлены результаты решения задачи переконденсации, полученные Ш. М. Йеном в 1973 году при тех же исходных данных с помощью метода прямого численного решения кинетического уравнения Больцмана.

Из сравнения рассмотренных кривых видно, что приближенное решение, полученное моментным методом, дает решение близкое к точному на уровне первых моментов функции распределения (зависимость $n(x)$). С ростом же порядка момента (зависимость $T(x)$, рис. 3.5) точность приближенного метода ухудшается.

3.2. Теплоперенос через слой разреженного газа

Эта задача в стационарной одномерной постановке отличается от предыдущей лишь формулированием граничных условий и заданием исходных данных. Действительно, как и в предыдущем случае переконденсации движение в газовом зазоре формируется двумя встречными потоками молекул. Следовательно, аппроксимация (3.1) пригодна для описания и теперь. Значит правомерно и решение моментной системы (3.31). Однако в рассматриваемой задаче масса не переносится с «горячей» поверхности на «холодную», т. е. $j_x=0$. Соответственно поток энергии E_x сводится к тепловому потоку q_x , т. е. $E_x=q_x$. Таким образом, решение (3.31) приобретает вид

$$t_1 = - \frac{0,225}{Kn_5} q_x x + C. \quad (3.61)$$

По постановке задачи задается давление (плотность) в газовом зазоре. Это может быть давление при $x=0$ или $x=L$, или среднее давление (плотность). Последнее наиболее приемлемо для прикладных задач. Итак будем полагать,

что величина $\frac{1}{L} \int_0^L n(x) dx$ — известна, т. е. правомерно соотношение

$$\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} [n_1(x) + n_2(x)] dx = \bar{n}, \quad (3.62)$$

где \bar{n} — средняя числовая плотность (концентрация) в слое газа между межфазными поверхностями. Таким образом заданы температуры «горячей» и «холодной» поверхностей: T_r и T_x , расстояние между этими поверхностями L и средняя концентрация \bar{n} . Необходимо определить q_x .

Рассмотрим решение задачи сначала в предположении о том, что попадающие на границу раздела фаз молекулы полностью приспособляются к условиям этой границы. Таким образом молекулы, движущиеся от «горячей» поверхности, описываются максвелловской функцией распределения с температурой T_r , а от «холодной» поверхности максвеллианом с температурой T_x . Говорят, что в этом случае происходит полная аккомодация энергии молекул на соответствующих поверхностях.

Можно охарактеризовать степень передачи энергии молекул границам раздела фаз с помощью так называемого коэффициента аккомодации энергии. Одна из возможных форм определения этого коэффициента следующая:

$$\alpha = \frac{E_{\text{пад}} - E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}} - E_{\text{равн}}}, \quad (3.63)$$

где $E_{\text{пад}}$ — энергия налетающих на межфазную поверхность молекул; $E_{\text{отр}}$ — энергия отраженных молекул; $E_{\text{равн}}$ — энергия, которую уносили бы отраженные молекулы, если бы налетевшие молекулы пришли в состояние равновесия с границей раздела фаз. Для полной аккомодации $\alpha = 1$. Таким образом решение задачи первоначально осуществляется при $\alpha_r = \alpha_x = 1$. Следовательно, для линейной задачи с аппроксимацией (3.1)

$$t_1(0) = t_r; \quad t_2(1) = t_x. \quad (3.64)$$

Условия (3.64) для температур встречных максвеллианов такие, как и при решении задачи о переконденсации (3.26). Плотности же этих максвеллианов в задаче о теплопереносе определяются несколько сложнее. Действительно, для переконденсации $N_1(0) = N_r$, а $N_2(1) = N_x$ (3.26). В задаче о теплопереносе конденсированная фаза представляет собой другое вещество по сравнению с газом, занимающим пространство между двумя плоскими стенками. Соответственно пропадает возможность определить $N_1(0)$ или $N_2(1)$ по линии насыщения, как это делалось для задачи о переконденсации.

Вместо этого при решении используется условие (3.62), определяющее величину средней концентрации*.

Постановка первого из условий (3.64) в решение (3.61) дает возможность определить постоянную интегрирования C . Именно: $C=t_r$ и (3.61) принимает вид

$$t_1 = -\frac{0,225}{Kn_6} q_x x + t_r. \quad (3.65)$$

Из (3.27) при $j_x=0$ и $E_x=q_x$ следует $t_2=t_1-q_x$, т. е.

$$t_2 = -q_x - \frac{0,225}{Kn_6} q_x x + t_r. \quad (3.66)$$

Подстановка в (3.66) второго из условий (3.64) позволяет определить

$$q_x = \frac{t_r - t_x}{1 + 0,225/Kn_6}. \quad (3.67)$$

В свободномолекулярном режиме $Kn_6 \Rightarrow \infty$

$$q_x = \Delta t, \quad (3.68)$$

где $\Delta t = t_r - t_x$.

Для континуального предела, т. е. при $Kn_6 \Rightarrow \infty$

$$q_x = \frac{1}{0,225} \Delta t Kn_6. \quad (3.69)$$

Размерный вид выражения для определения теплового потока q_x в свободномолекулярном режиме следует из (3.68) с учетом соотношения обезразмеривания для потока энергии (3.16)

$$q_x = (2RT_r - 2RT_x) \rho_6 \sqrt{RT_6} / 2\pi. \quad (3.68a)$$

Аналогичным образом, имея в виду, что $Kn_6 = l/L$, из (3.69) получим

$$q_x = \rho_6 \frac{2R(T_r - T_x)}{0,225} \sqrt{RT_6} / 2\pi \frac{l}{L}. \quad (3.69a)$$

Из (3.68a) и (3.69a) видно, что для определения величины теплового потока необходимо задание характерных (базовых) плотностей (давлений) и температуры газовой среды

* Следует заметить, что в задаче о теплопереносе $j_x=0$, т. е. для определения постоянных интегрирования из граничных условий требуется задание меньшего на единицу числа величин, чем для задачи о переконденсации. Таким образом задается \bar{n} по (3.62) вместо N_r и N_x по (3.26).

ρ_6 (P_6), T_6 , расстояния между поверхностями теплообмена L , разности их температур $T_r - T_x$. По ρ_6 и T_6 рассчитывается длина свободного пробега l_6 (3.18). Подстановка (3.18) в (3.69а) дает

$$q_x = \frac{1}{2\sqrt{\pi} 0,225} \frac{k^2 T_6}{\sqrt{K_1/2m} A_2 m} \frac{T_r - T_x}{L}. \quad (3.70)$$

Известно (см. [4]), что для максвелловских молекул коэффициент теплопроводности газа λ выражается через параметры потенциала взаимодействия K_1 , A_2 , T_6 и массу молекулы m , следующим образом:

$$\lambda = {}^{5/4} \frac{k^2 T_6}{\sqrt{K_1/2m} A_2 m}. \quad (3.71)$$

Так как $\frac{1}{2\sqrt{\pi} 0,225} = {}^{5/4}$, из сопоставления (3.70) и (3.71) следует

$$q_x = \frac{\lambda_6}{L} (T_r - T_x). \quad (3.70б)$$

Выражение (3.70б) определяет тепловой поток через слой газа в соответствии с законом Фурье. Таким образом общее решение (3.67) переходит в известное соотношение теплопроводности для сплошной среды при $Kn_6 \ll 1$.

Общая система моментных уравнений (3.17) и (3.20) позволяет получить решение нелинейной задачи о переносе тепла через плоский слой разреженного газа. В этом случае $T_r/T_x \neq 1$, и задача не линеаризуется. Тем не менее эту задачу удается решить аналитически при $\alpha = 1$ [14, 15]. В результате для определения теплового потока получается следующее соотношение:

$$q_x = \rho_6 2RT_6 \sqrt{2RT_6} \times \\ \times \frac{Kn_6 \left[(\sqrt{R_T} + R_T + 0,45/Kn_6)^2 - \left(1 + \sqrt{R_T} + \frac{0,45}{Kn_6} \sqrt{R_T} \right)^2 R_T \right]}{1,6 (1 + \sqrt{R_T} + 0,45/Kn_6)^2}, \quad (3.72)$$

где $R_T = T_x/T_r$, $T_6 = T_r$, $\rho_6 = \bar{\rho}$. Соотношение (3.72) позволяет определять тепловой поток при произвольных значениях отношения температур R_T и любых величинах числа Кнудсена Kn_6 .

Для произвольных значений коэффициентов аккомодации соответственно на горячей и холодной поверхностях $\alpha_{гор}$ и

$\alpha_{\text{хол}}$ система моментных уравнений решается численно. Результаты такого решения представлены на рис. 3.6 сплошными линиями для $\alpha_{\text{гор}}=0,1$, $\alpha_{\text{хол}}=1,0$ и штриховыми для $\alpha_{\text{гор}}=1,0$, $\alpha_{\text{хол}}=0,1$.

Анализ этих результатов показывает, что влияние коэффициентов аккомодации на величину теплового потока существенно, причем уменьшение $\alpha_{\text{хол}}$ приводит к более значительному уменьшению теплового потока, чем соответствующее изменение $\alpha_{\text{гор}}$. Например из сравнения кривых 2 и 6 для $Kn_0=1$ следует, что значения тепловых потоков при $R_T=0,2$ отличаются примерно в три раза. С приближением к сплошному пределу влияние коэффициентов вырождается (см. кривые 4 и 8). Следует также отметить, что при значительном отличии T_x от T_r зависимость $q_{\infty}/P\sqrt{2RT_r}$ становится немонотонной.

4. ОТРАЖЕНИЕ ЗВУКА ОТ МЕЖФАЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СВЕРХТЕКУЧЕГО ГЕЛИЯ

Результаты исследования испарения-конденсации с позиций физической кинетики оказывается весьма полезным при изучении различных процессов, реализующихся на межфазной поверхности: пар—жидкость (твердое тело). В качестве примера ниже рассматривается задача отражения звука от этой границы раздела фаз.

Постановка задачи сводится к следующему. Плоская звуковая волна движется в пространстве, занятом насыщенным паром, и достигает свободной поверхности жидкости (рис. 4.1). Пусть в некоторый момент времени давление в падающей волне на границе с жидкостью оказывается повышенным и имеет значение $P_0 + \widehat{P}_i$, где P_0 — невозмущенное давление насыщенного пара, соответствующее невозмущенной температуре поверхности жидкости T_0 ; \widehat{P}_i — величина амплитуды пульсаций давления в падающей волне.

Вследствие повышения давления возникает конденсация пара на поверхности жидкости и температура поверхности начинает увеличиваться. Через интервал времени, равный полупериоду колебаний звуковой волны, картина меняется на обратную. Давление пара оказывается пониженным: $P_0 - \widehat{P}_i$, начинается испарение поверхностного слоя жидкости, температура границы раздела фаз понижается. В результате

в паре возникает отраженная волна звука с амплитудой \widehat{P}_r , в жидкости — проходящая волна звука с амплитудой \widehat{P}_i' (характеристики жидкости будем пометать «штрихом»).

Далее из-за колебаний температур фаз на границе, от межфазной поверхности в глубь пара и жидкости будут распространяться затухающие с глубиной температурные волны, определяемые механизмом переноса тепла в этих фазах. Неравновесность, сопровождающая процессы испарения-конденсации, определяет ряд специфических эффектов, в том числе температурный скачок на границе.

Выражение $(\widehat{P}_r)^2/(\widehat{P}_i)^2$ представляет собой отношение интенсивностей потоков энергии отраженной (r) и падающей (i) звуковых волн. Величину $R = |\widehat{P}_r/\widehat{P}_i|$ будем называть коэффициентом отражения звука.

На межфазной поверхности должны выполняться условия сохранения полных потоков массы, импульса и энергии, составляющие в совокупности так называемые универсальные условия совместности [16].

Для потока массы имеем

$$\rho(u - C_s) = \rho'(u' - C_s) = j, \quad (4.1)$$

где ρ, u и ρ', u' — соответственно плотность, скорость движения пара и жидкости; C_s — скорость движения границы раздела фаз; j — плотность потока массы.

Для потока импульса

$$\widehat{P} = \widehat{P}_i', \quad (4.2)$$

где $\widehat{P}, \widehat{P}_i'$ — соответственно пульсации давления в паре и жидкости (невозмущенные давления в фазах очевидно равны). В соотношении (4.2) опущены квадратичные по u члены, как малые более высокого порядка, и слагаемые вида $\mu \frac{\partial u}{\partial x}$, где μ — вязкость среды, которые тоже несущественны.

Оценка, например, для пара дает $\mu \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{l}{L} \widehat{P}$, где l — длина свободного пробега молекул пара; L — длина звуковой волны; \widehat{P} — возмущение давления в паре. В континуальном режиме, для которого обосновано гидродинамическое описание звука, $l/L \ll 1$.

Для потока энергии

$$q+rj=q', \quad (4.3)$$

где q, q' — плотности потока тепла в паре и жидкости; r — теплота парообразования.

Соотношения (4.1)—(4.3) дополняются условиями (так называемыми специальными условиями совместности), которые отражают эффекты неравновесности фазового перехода в паре на межфазной поверхности. Они получены в [11] на основе решения кинетического уравнения Больцмана моментным методом в линейном приближении. Эти соотношения имеют вид

$$T'_{x=0} - T_{x=0} = A_1 j + B_1 q; \quad (4.4)$$

$$P_s - P_G = A_2 j + B_2 q, \quad (4.5)$$

где $T'_{x=0}, T_{x=0}$ — температура жидкости и пара на границе раздела фаз; P_s — давление насыщения, соответствующее температуре T_0 ; P_G — давление пара (полное, с учетом падающей и отраженной волн звука). Коэффициенты в (4.4) и (4.5) имеют вид

$$A_1 = 0,454 T_0 / \rho_0 \sqrt{2R_G T_0}; \quad B_1 = 1,074 T_0 / \rho_0 \sqrt{2R_G T_0};$$

$$A_2 = 2 \sqrt{\pi} \frac{1-0,4\beta}{\beta} \frac{P_0}{\rho_0 \sqrt{2R_0 T_0}}; \quad B_2 = 0,443 / \sqrt{2R_0 T_0},$$

где R_G — индивидуальная газовая постоянная; β — коэффициент испарения-конденсации.

Следует отметить два момента, связанных с включением в анализ условий (4.4), (4.5).

1. Эти соотношения были получены для стационарных режимов испарения-конденсации. При отражении звуковой волны процессы испарения и конденсации реализуются в условиях нестационарных. Однако временной масштаб нестационарности (период звуковой волны) равен L/a , где a — скорость звука в паре, существенно больше времени кинетической релаксации, имеющей порядок времени между столкновениями молекул. Поэтому соотношения (4.4) и (4.5) справедливы также для условий настоящего анализа.

2. Привлечение двух неравновесных граничных условий (4.4), (4.5) имеет принципиальное значение: именно вследствие этого достигается замкнутое описание явления с необходимой детализацией.

Будем рассматривать монохроматические волны, движущиеся по нормали к межфазной границе. В них все характеристики являются простыми периодическими (гармоническими) функциями времени. Имея в виду линейность анализа, «такие функции обычно бывает удобно писать в виде действительной части комплексного выражения» [17] вида

$$\widehat{\psi}e^{i\omega(t \pm x/a)}, \quad (4.6)$$

где $\widehat{\psi}$ — «амплитуда» колебания соответствующей характеристики, например, давления, скорости, плотности и т. д. Величина $\widehat{\psi}$, вообще говоря, комплексная; t — время; x — координата по нормали к межфазной поверхности; a — скорость распространения волны звука.

Например, колебания давления в падающей (i) и отраженной (r) волнах описываются соотношениями

$$\widehat{P}_i e^{i\omega(t+x/a)}, \quad \widehat{P}_r e^{i\omega(t-x/a)},$$

колебания давления в проходящей волне в жидкости: $\widehat{P}_t' e^{i\omega(t+x/a')}$, где a' — скорость звука в жидкости. Возмущение давления в паре является суперпозицией колебаний давления в падающей и отраженной волнах. В последних выражениях «амплитуды» \widehat{P}_i , \widehat{P}_r , \widehat{P}_t' в общем случае все — комплексные числа.

Обозначим комплексное число $R_r = \widehat{P}_r / \widehat{P}_i$, тогда искомым коэффициентом отражения звука R есть модуль R_r , т. е.

$$R = (R_r R_r^*)^{1/2}.$$

Скорость пара определяется как суперпозиция скоростей в падающей и отраженной волне:

$$u = \widehat{u}_i e^{i\omega(t+x/a)} + \widehat{u}_r e^{i\omega(t-x/a)}.$$

Скорость жидкости, вызываемая проходящей волной звука, $\widehat{u}' = \widehat{u}_t' e^{i\omega(t+x/a')}$. Между амплитудами \widehat{P} и \widehat{u} имеется взаимосвязь, определяемая уравнениями движения Эйлера [17]:

$$\widehat{P}_i = -\rho a i \widehat{u}_i; \quad \widehat{P}_r = +\rho a i \widehat{u}_r; \quad \widehat{P}_t = -\rho' a' i \widehat{u}_t'. \quad (4.7)$$

Как известно, пульсации давления в звуковой волне порождают пульсации температуры вследствие изоэнтропийного сжатия вещества

$$\widehat{T}_s = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s \widehat{P}.$$

Наряду с такими изменениями температуры, около границы раздела существуют температурные волны, вызванные пульсациями температур фаз на границе. Эти волны представляют собой решения уравнения теплопроводности для пара и жидкости (\widehat{T}_λ), когда обе фазы являются классическими жидкостями. Для квантовой жидкости сверхтекучего гелия (He II) температурная волна тоже реализуется, однако взаимосвязь теплового потока и пульсаций температур теперь иная, чем в классическом случае, что обусловлено другим механизмом переноса тепла. В обоих случаях тем не менее температуры фаз при $x=0$ могут быть представлены как

$$T = T_0 + (\widehat{T}_s + \widehat{T}_\lambda) e^{i\omega t}; \quad (4.8)$$

$$T' = T_0 + (\widehat{T}_s' + \widehat{T}_\lambda') e^{i\omega t}.$$

Существенно, что температурные возмущения \widehat{T}_λ имеют пространственным масштабом величины порядка $\sqrt{A/\omega}$ (глубина проникновения волны), где A — коэффициент теплопроводности среды. Для пара оценка дает $\sqrt{A/\omega} \sim \sqrt{lL}$ и ясно, что $\sqrt{A/\omega} \ll L$. При вычислении потока тепла на поверхности должна, естественно, учитываться лишь составляющая \widehat{T}_λ температурного поля. На рис. 4.2 схематически показана картина изменения температуры пара вблизи границы, иллюстрирующая вышесказанное в отношении пространственных масштабов.

Дальнейший анализ выполняется для частного случая, характеризуемого неравенством

$$\frac{q}{P_0 \sqrt{2RT_0}} \ll \frac{j}{\rho_0 \sqrt{2RT_0}}. \quad (4.9)$$

Решение, свободное от допущения (4.9), приведено в [18] для классической жидкости.

Из (4.9) следует, что $q \ll jr$, так как $r > RT$ (например для He II при $T=1\text{ K}$ $r \cong 2,4 RT$). Таким образом введением

неравенства (4.9) круг рассматриваемых задач ограничивается такими, для которых тепло, поступающее на границу раздела фаз в результате конденсации (jr), существенно превышает тепловой поток, обусловленный теплопроводностью пара (q). Соответственно выражение (4.3) принимает вид

$$jr = q', \quad (4.3a)$$

а условие (4.5) запишется как

$$P_s - P_G = A_2 j. \quad (4.5a)$$

С учетом определения A_2 (4.5a) можно привести к виду

$$j = \frac{\beta}{1 - 0,4\beta} \frac{P_s - P_G}{\sqrt{2\pi RT_0}}. \quad (4.5б)$$

При $\beta = 1$ (4.5б) преобразуется в

$$j = \frac{5}{3} \frac{P_s - P_G}{\sqrt{2RT_0}}. \quad (4.5в)$$

Последнее выражение с коэффициентом $16/9$ вместо $5/3$ было получено в завершающей части решения линейной задачи о переконденсации (3.48a) с $P_r = P_s$ и $P_\infty = P_G$.

Выше отмечалось, что возмущение давления в паре является суперпозицией колебаний давления в падающей и отраженных волнах. Следовательно, при $x = 0$

$$P_G = P_0 + (\widehat{P}_i + \widehat{P}_r) e^{i\omega t}; \quad (4.10)$$

$$P_L = P_0 + \widehat{P}_t' e^{i\omega t},$$

где P_L — давление в жидкости. Тогда в силу (4.2)

$$\widehat{P}_i + \widehat{P}_r = \widehat{P}_t'. \quad (4.2a)$$

Взаимосвязь теплового потока q' и T_λ' определяется для сверхтекучего гелия соотношением с учетом положительно-го направления оси x на рис. 4.1 [19]

$$q' = -\rho' a_2 C_T T_\lambda', \quad (4.11)$$

где a_2 — скорость второго звука в He II; C_T — теплоемкость сверхтекучего гелия.

Как отмечалось вначале при падении звуковой волны температура межфазной поверхности изменяется, соответ-

ственно изменяется и P_s . В общем случае P_s может быть записано как

$$P_s = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} \left[T'_\lambda + \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)'_s P'_i \right]. \quad (4.12)$$

Из термодинамики известно, что для изоэнтропного сжатия $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_s = (T/C) \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$, где C — удельная теплоемкость; v — удельный объем. Так как жидкость практически несжимаема $\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \Rightarrow 0$ и следовательно, $T'_\lambda \gg \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)'_s P'_i$. Соответственно (4.12) упрощается до

$$P_s = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} \widehat{T}'_\lambda e^{i\omega t}. \quad (4.13)$$

Подстановка (4.13) и (4.10) в (4.5в) дает

$$\widehat{j} = \sqrt[5]{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi RT_0}} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} \widehat{T}'_\lambda - \widehat{P}_i - \widehat{P}_r \right]. \quad (4.14)$$

Для идеального одноатомного газа скорость звука $a = \sqrt{5/3 RT_0}$. Соответственно (4.14) может быть записано как

$$\widehat{j} = 0,86/a \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} \widehat{T}'_\lambda - \widehat{P}_i - \widehat{P}_r \right], \quad (4.5г)$$

так как $\sqrt{125/54 \pi} \cong 0,86$.

Условие (4.1) после исключения C_s дает

$$j = \frac{\rho' \rho}{(\rho' - \rho)} (u - u'). \quad (4.1а)$$

Имея в виду то, что скорость пара определяется как суперпозиция скоростей в падающей и отраженной волне, получим при $x=0$ для амплитуды скорости

$$\widehat{u} = \widehat{u}_i + \widehat{u}_r. \quad (4.15)$$

Выразив из (4.7) \widehat{u}_i , \widehat{u}_r и \widehat{u}'_i через \widehat{P}_i , \widehat{P}_r и \widehat{P}'_i и подставив эти выражения в (4.15), получим

$$\widehat{u} = -\frac{1}{\rho a} (\widehat{P}_i - \widehat{P}_r). \quad (4.16)$$

Подстановка (4.16) и $\widehat{u}' = -\widehat{P}_i'/\rho'a'$ в (4.1а) для амплитуд \widehat{u} и \widehat{u}' дает

$$\widehat{j} = -\rho'\rho/(\rho' - \rho) [(\widehat{P}_i - \widehat{P}_r)/\rho a - \widehat{P}_i'/\rho'a']. \quad (4.16)$$

В силу (4.2а) $\widehat{P}_i' = \widehat{P}_i + \widehat{P}_r$ и (4.16) примет вид

$$\widehat{j} = -\rho'/[a(\rho' - \rho)] [\widehat{P}_i - \widehat{P}_r - \chi(\widehat{P}_i + \widehat{P}_r)], \quad (4.1в)$$

где $\chi = \rho a/\rho'a'$ — приведенное волновое сопротивление пара по отношению к жидкости.

Уравнение (4.11) может быть записано с учетом (4.3а) для амплитуд \widehat{T}_λ' и \widehat{j}

$$\widehat{j}r = -\rho'a_2 C_T \widehat{T}_\lambda'. \quad (4.11а)$$

Система трех уравнений (4.5г), (4.11а), (4.1в), линейных относительно амплитуд, содержит четыре амплитуды \widehat{P}_i , \widehat{P}_r , \widehat{T}_λ' , \widehat{j} . Эта система уравнений позволяет найти коэффициент отражения звука $|\widehat{P}_r/\widehat{P}_i|$ и другие коэффициенты преобразования звука. Выразив из (4.11а) \widehat{T}_λ' и подставив в (4.5г), получим

$$\widehat{j}/\widehat{P}_i = - (0,86/a) \left[\widehat{j}r \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} / (\rho' a_2 C_T \widehat{P}_i) + 1 + R \right]. \quad (4.17)$$

Найдем из (4.17) $\widehat{j}/\widehat{P}_i$

$$\widehat{j}/\widehat{P}_i = - \frac{(0,86/a)(1+R)}{1 + 0,86r/(\rho' a_2 C_T a) \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}}}. \quad (4.18)$$

С другой стороны $\widehat{j}/\widehat{P}_i$ может быть получено из (4.1в). Выразив $\widehat{j}/\widehat{P}_i$ с помощью этого выражения и приравняв $\widehat{j}/\widehat{P}_i$, определенному по (4.18), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\rho'}{(\rho' - \rho)} [1 - R - \chi(1 + R)] = \\ & = \frac{0,86(1+R)}{1 + 0,86r/(\rho' a_2 C_T a) \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из уравнения (4.19) R определяется явно:

$$R = \frac{1 - \chi - 0,86(\rho' - \rho)/A\rho'}{1 + \chi + 0,86(\rho' - \rho)/A\rho'}, \quad (4.20)$$

где $A = 1 + \frac{0,86r}{\rho' a_2 C_T a} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}}$. Производная $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}}$ может быть найдена из уравнения Клапейрона—Клаузиуса как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} = \frac{r}{T_0(v'' - v')} = \frac{r\rho' \rho}{T_0(\rho' - \rho)}.$$

Соответственно выражение для A примет вид

$$A = 1 + 0,86r^2\rho/a_2 C_T T_0 a (\rho' - \rho). \quad (4.21)$$

Найдем предельные значения R , даваемые формулой (4.20). При увеличении температуры вблизи λ -точки (2,17 К) скорость второго звука a_2 уменьшается и при $T_0 \rightarrow 2,17$ К, $a_2 \rightarrow 0$. Соответственно по (4.21) $A \rightarrow \infty$ и по (4.20) R определяется выражением

$$R = (1 - \chi)/(1 + \chi). \quad (4.20a)$$

Соотношение (4.20a) представляет собой хорошо известную формулу для расчета коэффициента отражения звука от межфазной поверхности жидкости без учета процессов испарения-конденсации на этой поверхности. Другой предельный случай может быть получен из (4.20), (4.21) при $A \rightarrow 1$. Для такого предела

$$R = \frac{1 - \chi - 0,86(\rho' - \rho)/\rho'}{1 + \chi + 0,86(\rho' - \rho)/\rho'}. \quad (4.20б)$$

Поскольку $\chi \ll 1$, а как правило $(\rho' - \rho)/\rho' \simeq 1$, из (4.20б) следует

$$R = (1 - 0,86)/(1 + 0,86) \cong 0,075. \quad (4.20в)$$

Эта величина является минимальным значением R , реализуемым в сверхтекучей жидкости с высокоэффективным отводом тепла, выделяющегося при конденсации, в глубь конденсированной фазы. Действительно стремление A к 1 может быть осуществлено при стремлении $a_2 C_T T_0$ к бесконечности. При конечном q' в силу (4.11) такое стремление должно приводить к минимально возможному значению пульсации температуры T' , т. е. поступающее в результате конденсации тепло очень быстро отводится от границы раздела фаз, не позволяя ей нагреться.

Рассчитаем значение R по (4.20б), (4.20в) для $T_0=2$. При этой температуре $\rho'=145$ кг/м³; $\rho=0,76$ кг³/м; $C_T=5 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); $a_2=16,7$ м/с; $a=83,2$ м/с; $r=23 \cdot 10^3$ Дж/кг. Соответственно $A=1,17$ и $R=0,153$. Полученное значение R находится ближе к пределу (4.20в) чем к величине R , определяемой соотношением (4.20а). Это говорит о том, что отвод тепла конденсации от межфазной поверхности сверхтекучего гелия в глубь этой жидкости осуществляется весьма эффективно.

Выражение для определения коэффициента отражения звука (4.20) может быть обобщено на случай произвольного значения коэффициента конденсации β . С этой целью в соответствии с (4.5б) вместо (4.5г) имеем

$$\hat{j} = \frac{0,52}{a} \frac{\beta}{1-0,40\beta} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\text{нас}} \hat{T}'_\lambda - \hat{P}_i - \hat{P}_r \right]. \quad (4.5д)$$

Замена (4.5г) на (4.5д) дает в результате решения системы (4.5д), (4.11а), (4.1в):

$$R = \frac{1-\chi - \frac{0,52\beta}{1-0,40\beta} \frac{\rho'-\rho}{A\rho'}}{1+\chi + \frac{0,52\beta}{1-0,40\beta} \frac{\rho'-\rho}{A\rho'}}. \quad (4.20г)$$

На рис. 4.3 приведена зависимость R от β , полученная из (4.20г) для $T_0=2$ К. Видно, что по мере уменьшения β , т. е. превращения межфазной поверхности во все более непроницаемую, коэффициент отражения звука приближается к своему классическому пределу, определяемому формулой (4.20а).

В [18] был введен коэффициент проницаемости границы

$$G = |\hat{j}a/\hat{P}_i|, \quad (4.22)$$

который характеризует относительную интенсивность поперечного потока массы, пересекающего границу при испарении-конденсации в процессе отражения (прохождения) падающей звуковой волны. Коэффициент не имеет аналога в «классическом» случае. Из (4.1в) следует, что G определяется соотношением

$$|\hat{j}a/\hat{P}_i| = \frac{\rho'}{\rho'-\rho} [1 - R - \chi(1 + R)]. \quad (4.23)$$

Подстановка в (4.23) значения R , определенного в общем случае выражением (4.20г), дает возможность рассчитать величину G . Именно таким образом получена зависимость $G=f(\beta)$, представленная на рис. 4.3.

Похожие результаты R и G получены в [18] для жидких металлов. Вспомнив (см. выше), что величина R^2 представляет собой отношение интенсивностей потоков энергии отраженной и падающей звуковых волн, приходим к следующему выводу. При коэффициентах конденсации близких к единице от межфазной поверхности хорошо теплопроводных жидких сред (сверхтекучий гелий, жидкие металлы) звук отражается слабо. При этом энергия падающей звуковой волны преобразуется в тепло, распространяющееся внутрь конденсированной фазы, т. е. межфазная поверхность «работает» как своеобразный преобразователь энергии.

В заключение этого раздела необходимо заметить, что допущение (4.9) позволило облегчить решение поставленной задачи за счет сокращения числа уравнений решаемой системы на одно: использование только условия (4.5) вместо двух соотношений (4.4), (4.5), а также упрощения уравнений (4.3) и (4.5): отсутствие в них членов с q . Решение полной системы приводит в общем случае к результату, в котором R является комплексным числом. Однако общие тенденции, получаемые в результате такого решения, совпадают с выводами и данными упрощенного анализа, представленного выше.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Расчет моментов интеграла столкновений для максвелловских молекул

Моментом интеграла столкновений называется выражение вида

$$I_{\varphi} = \int_{\substack{\infty \\ \text{по } \vec{\xi}}}^{\infty} \varphi(\vec{\xi}) J(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}) d\vec{\xi}, \quad (\text{П1.1})$$

где $J(\tau, \vec{x}, \vec{\xi})$ — интеграл столкновений. Таким образом величина I_{φ} есть интеграл по пространству скоростей с какой-либо весовой функцией $\varphi(\vec{\xi})$ скорости $\vec{\xi}$ от правой части уравнения Больцмана. Как известно, интеграл столкновений это многократный интеграл

$$J(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}) = \int_{\substack{+\infty \\ \text{по } \vec{\xi}}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (f' f'_1 - f f_1) |g| b db d\vec{\xi}_1 d\varepsilon, \quad (\text{П1.2})$$

где $\vec{\xi}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ — скорость молекулы; $\vec{g} = \vec{\xi}_1 - \vec{\xi}$ — скорость одной из сталкивающихся молекул относительно другой; f', f'_1, f, f_1 — функции распределения от соответствующих аргументов, т. е.

$$f = f(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}), \quad f_1 = f(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}_1);$$

$$f' = f(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}'), \quad f'_1 = f(\tau, \vec{x}, \vec{\xi}'_1);$$

$\vec{\xi}'$ — скорость $\vec{\xi}$ молекулы после столкновения; $\vec{\xi}'_1$ — скорость $\vec{\xi}_1$ молекулы после столкновения; b — прицельное расстояние; ε — угол в цилиндрической системе координат \vec{g}, b, ε . Интеграл (П1.1) симметричен относительно $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}_1$. Из симметрии следует (опуская промежуточные выкладки)

$$I_{\varphi} = 1/2 \int_{\substack{+\infty \\ \text{по } \vec{\xi}_1}}^{\infty} \int_{\substack{+\infty \\ \text{по } \vec{\xi}}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} (\varphi' + \varphi'_1 - \varphi - \varphi_1) f f_1 g b db d\varepsilon d\vec{\xi} d\vec{\xi}_1. \quad (\text{П1.3})$$

Следовательно, вычисление момента от интеграла столкновений можно свести к вычислению $I_{\vec{q}}$ по формуле (П1.3).

Возьмем в качестве примера $\varphi(\vec{\xi}) = \xi^2 \xi_x$, поскольку эта функция от скорости чаще других встречается в работе. Тогда (П1.3) запишется как

$$I(\vec{\xi}^2 \xi_x) = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} (\xi'_x \vec{\xi}'^2 + \xi'_{1x} \vec{\xi}'_1{}^2 - \xi_x \vec{\xi}^2 - \xi_{1x} \vec{\xi}_1^2) \times \\ \times ff_1 g b d b d s d \vec{\xi} d \vec{\xi}_1. \quad (\text{П1.4})$$

Следуя Л. Больцману [3], произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} u &= \xi_x + \xi_{x1}; & p &= \xi_x - \xi_{x1}; \\ b &= \xi_y + \xi_{y1}; & q &= \xi_y - \xi_{y1}; \\ m &= \xi_z + \xi_{z1}; & r &= \xi_z - \xi_{z1}. \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

Из системы (П1.5) выразим $\xi_x, \xi_{x1}, \dots, \xi_{z1}$ через u, p, b, q, m, r и подставим эти выражения для $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}_1$ в (П1.4). Получим

$$\begin{aligned} \xi_x \vec{\xi}^2 + \xi_{x1} \vec{\xi}_1^2 &= \frac{(u+p)}{2} \left[\left(\frac{u+p}{2} \right)^2 + \left(\frac{b+q}{2} \right)^2 + \left(\frac{m+r}{2} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{(u-p)}{2} \left[\left(\frac{u-p}{2} \right)^2 + \left(\frac{b-q}{2} \right)^2 + \left(\frac{m-r}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.6})$$

Аналогичную процедуру проделаем со штрихованными скоростями. В соотношении (П1.6) вместо u будет записано u' , вместо p — p' и т. д.

Поскольку рассматривается система (газ, пар), в которой взаимодействующие молекулы имеют одинаковую массу, из уравнений сохранения количества движения ясно, что

$$u = u', \quad b' = b, \quad m' = m. \quad (\text{П1.7})$$

Понятно также, что относительная скорость в процессе столкновений остается без изменений, т. е. $g = g'$. Учитывая (П1.7) и последнее равенство, убеждаемся в справедливости соотношения $u'g' = ug$ (П1.8). Используя (П1.6) — (П1.8), получаем

$$\begin{aligned} \xi'_x \vec{\xi}'^2 + \xi'_{1x} \vec{\xi}'_1{}^2 - \xi_x \vec{\xi}^2 - \xi_{1x} \vec{\xi}_1^2 &= 1/4 \{ u (3p'^2 + q'^2 + r'^2 - \\ &- 3p^2 - q^2 - r^2) + 2bp'q' + 2mp'r' - 2bpq - 2mpr \} \equiv v. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

Для дальнейшего изложения необходимы некоторые сведения о сферических гармониках. Как известно [3], [9], [12], сферической гармоникой или шаровой функцией называется любая функция φ , удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{П1.10})$$

Существует теорема*, утверждающая, что любая непрерывная, рациональная, интегрируемая функция f может быть представлена так:

$$f = Y_n + r^2 Y_{n-2} + r^4 Y_{n-4} + \dots, \quad (\text{П1.11})$$

где Y_n — сферические гармоники степени n ; $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Следовательно, функция $3p^2 + q^2 + r^2$ может быть представлена суммой сферических гармоник относительно p, q, r . Нетрудно также это показать, просто проведя некоторые преобразования. Действительно, поскольку $g' = g$, то справедливо следующее

$$\begin{aligned} & 3p'^2 + q'^2 + r'^2 - 3p^2 - q^2 - r^2 = \\ & = 3p'^2 + q'^2 + r'^2 - 5/3g'^2 - 3p^2 - q^2 - r^2 + 5/3g^2. \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Имея в виду, что $g^2 = p^2 + q^2 + r^2$ (П1.12) приводится к виду

$$\begin{aligned} & 3p'^2 + q'^2 + r'^2 - 3p^2 - q^2 - r^2 = 2/3 [(2p'^2 - q'^2 - r'^2) - \\ & - (2p^2 - q^2 - r^2)]. \end{aligned} \quad (\text{П1.13})$$

Функция $2p^2 - q^2 - r^2$ является сферической гармоникой относительно аргументов p, q, r , в чем можно убедиться, подставив $\varphi = 2p^2 - q^2 - r^2$ в уравнение Лапласа. Ясно, что $2bprq + 2mpr$ — тоже сферическая гармоника. Таким образом, выражение (П1.9) представляет разность между значениями сферической гармоники $\varphi = 4/3 ux^2 - 2/3 uy^2 - 2/3 uz^2 + 2bxy + 2mxz$ в двух точках: $x_1 = p'$; $y_1 = q'$; $z_1 = r'$ и $x = p, y = q, z = r$. Ясно, что в пространстве x, y, z эти точки находятся на сфере радиуса g , так как $g^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Сферическую гармонику, заданную таким образом, называют поверхностной. Обозначим ее U_n . Согласно [12], если

* Строгое доказательство этой теоремы можно найти в [12].

известно значение U_n в полюсе сферы (A_n), то U_n в любой точке на поверхности может быть выражено так:

$$U_n(\theta, \Phi) = A_n P_n(\cos \theta), \quad (\text{П1.14})$$

где P_n — зональная сферическая гармоника, которая есть не что иное, как решение уравнения Лежандра

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dy}{d\mu} + n(n+1)y = 0, \quad (\text{П1.15})$$

где $\mu = \cos \theta$.

Следовательно, считая, что точка $x=p$, $y=q$, $z=r$ — полюс сферы, получаем из (П1.14) применительно к нашему рассмотрению

$$\varphi_{x_1} = P_2(\mu) \varphi_x. \quad (\text{П1.16})$$

Известно, что $P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$. Тогда (П1.9) принимает вид

$$v = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (\mu^2 - 1) [u^{4/3} p^2 - 2/3 q^2 - 2/3 r^2] + 2bpr, \quad (\text{П1.17})$$

Далее

$$\int_0^{2\pi} v d\varepsilon = \frac{\pi}{2} {}^{3/2} (\mu^2 - 1) [u^{4/3} p^2 - 2/3 q^2 - 2/3 r^2] + 2bpr; \quad (\text{П1.18})$$

$\mu = \cos(\pi - 2\vartheta)$, где $\pi - 2\vartheta$ угол между векторами \vec{g} и \vec{g}' ;

$$\mu^2 - 1 = -4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta. \quad (\text{П1.19})$$

Обозначим

$$u^{4/3} p^2 - 2/3 q^2 - 2/3 r^2 + 2bpr = \Phi. \quad (\text{П1.20})$$

С учетом (П1.17) — (П1.20) выражение (П1.4) примет вид

$$I(\vec{\xi}_x, \vec{\xi}_2^2) = -1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} {}^{3/2} 4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \Phi g b f f_1 db d\xi d\xi_1. \quad (\text{П1.21})$$

Для дальнейшего вычисления необходимо знать, как молекулы взаимодействуют друг с другом. Проведем интегрирование для закона взаимодействия

$$\psi(r) = K_1/r^{n+1}, \quad (\text{П1.22})$$

где $\psi(r)$ — сила взаимодействия; r — расстояние; K_1 — постоянная; $n=4$ (максвелловские молекулы).

Интеграл по b в (П1.21) был получен Максвеллом [3], [9] и представляется выражением

$$2\pi \int_0^{\infty} gbdb \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta = A_2 \sqrt{K_1/2m}, \quad (\text{П1.23})$$

где $A_2=1,3682$. Подставив (П1.23) в (П1.21), получим

$$I(\vec{\xi}_x \vec{\xi}^2) = -3/4 A_2 \sqrt{K_1/2m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi f f_1 d\vec{\xi} d\vec{\xi}_1. \quad (\text{П1.24})$$

Выражение (П1.24) является интегралом только по пространству скоростей $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}_1$. Для его вычисления достаточно в соответствии с (П1.5) совершить обратный переход от переменных u, p, q к переменным $\xi_x, \xi_{x_1}, \xi_y, \xi_{y_1}, \dots$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \Phi = & -2/3(\xi_x \xi_y^2 + \xi_x \xi_{y_1}^2 + \xi_{x_1} \xi_y^2 + \xi_{x_1} \xi_{y_1}^2 + \xi_x \xi_z^2 + \xi_x \xi_{z_1}^2 + \xi_{x_1} \xi_z^2 + \\ & + \xi_{x_1} \xi_{z_1}^2 - 2\xi_x^3 + 2\xi_{x_1}^2 \xi_x + 2\xi_x^2 \xi_{x_1} - 2\xi_{x_1}^3) + 2\xi_x \xi_y^2 - 2\xi_{x_1} \xi_y^2 - 2\xi_x \xi_{y_1}^2 + \\ & + 2\xi_{x_1} \xi_{y_1}^2 + 2\xi_x \xi_z^2 - 2\xi_{x_1} \xi_z^2 - 2\xi_{x_1} \xi_{z_1}^2 + 2\xi_{x_1} \xi_{z_1}^2 \end{aligned} \quad (\text{П1.25})$$

Подставив (П1.25) в (П1.24) и произведя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} I(\vec{\xi}_x \vec{\xi}^2) = & -3/4 A_2 \sqrt{K_1/2m}^8/3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x \vec{\xi}^2 f d\vec{\xi} - 2 \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x d\vec{\xi} \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\xi}^2 f d\vec{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x^2 d\vec{\xi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.26})$$

Интегрирование в последнем выражении может быть легко проведено для конкретной функции распределения f . Например, если f имеет вид (3.1), то из (П1.26)

$$\begin{aligned} I(\vec{\xi}_x \vec{\xi}^2) = & -A_2 \sqrt{K_1/2m} \left\{ \frac{(n_1+n_2)}{\sqrt{\pi}} \left[(2kT_1/m)^{3/2} n_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - n_2 \left(\frac{2kT_2}{m} \right)^{3/2} \right] - 5/2 [n_1 (2kT_1/m) + \right. \\ & \left. + n_2 (2kT_2/m)] [n_1 \sqrt{kT_1/2\pi m} - n_2 \sqrt{kT_2/2\pi m}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

Расчет других моментов интеграла столкновений при той же функции распределения (3.1) дает следующие результаты:

$$I(\xi_x^3) = -^{3/8} A_2 \sqrt{K_1/2m} \left\{ \frac{(n_1+n_2)}{\sqrt{\pi}} [n_1(2kT_1/m)^{3/2} - n_2(2kT_2/m)^{3/2}] - \right. \\ \left. - 4 [n_1(2kT_1/m) + n_2(2kT_2/m)] (n_1 \sqrt{kT_1/2\pi m} - \right. \\ \left. - n_2 \sqrt{kT_2/2\pi m}) \right\}; \quad (\text{П1.28})$$

$$I(\xi_x \xi_y^2) = -^{5/16} A_2 \sqrt{K_1/2m} \left\{ \frac{(n_1+n_2)}{\sqrt{\pi}} [n_1(2kT_1/m)^{3/2} - \right. \\ \left. - n_2(2kT_2/m)^{3/2}] - ^{8/5} [n_1(2kT_2/m) + \right. \\ \left. + n_2(2kT_2/m)] (n_1 \sqrt{kT_1/2\pi m} - n_2 \sqrt{kT_2/2\pi m}) \right\}. \quad (\text{П1.29})$$

По рассмотренной методике могут быть рассчитаны моменты более высокого порядка. При этом, когда записываются выражения типа (П1.9), (П1.12), (П1.13), появляются сферические гармоники, порядок которых равен наивысшей степени ξ в выражении $\varphi = \varphi(\xi)$. Возникают определенные трудности при интегрировании, однако в ряде случаев расчет можно довести до конца. Например, при $\varphi = \xi_x^4 + \xi_y^4 + \xi_z^4$ имеем

$$I(\xi_x^4 + \xi_y^4 + \xi_z^4) = -3A_2 \sqrt{K_1/2m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (1,075 \xi_x^4 + \right. \\ \left. + 1,075 \xi_y^4 + 1,075 \xi_z^4 - 1,224 \xi_x^2 \xi_y^2 - 1,224 \xi_x^2 \xi_z^2 - 1,224 \xi_y^2 \xi_z^2) f d\vec{\xi} - \right. \\ \left. - 0,776 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x^2 d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_x^2 d\vec{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_y^2 d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f \xi_y^2 d\vec{\xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \xi_z^2 f d\vec{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_z^2 f d\vec{\xi} \right) - 1,224 \left(\int \xi_x^2 f d\vec{\xi} \int \xi_y^2 f d\vec{\xi} + \right. \\ \left. + \int \xi_x^2 f d\vec{\xi} \int \xi_z^2 f d\vec{\xi} + \int \xi_y^2 f d\vec{\xi} \int \xi_z^2 f d\vec{\xi} \right) - \\ \left. - 0,15 \int f \xi_x d\vec{\xi} \int f \xi_x^3 d\vec{\xi} + 0,45 \int f \xi_x d\vec{\xi} \int f (\xi_x \xi_y^2 + \xi_x \xi_z^2) d\vec{\xi} \right]. \quad (\text{П1.30})$$

Наличие различных численных коэффициентов в (П1.30) объясняется тем, что при построении соотношения типа (П1.16) для сферической гармоники четвертого порядка: $P_4(\mu) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{35}{8}\mu^4$, где, как известно $\mu = \cos(\pi - 2\vartheta)$. При интегрировании на этапе (П1.21) — (П1.23) наряду с величиной A_2 (см. П1.23) появляется

$$A_4 = \sqrt{m/2K_1\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g \sin^4 2\theta b db. \quad (\text{П1.31})$$

Согласно [12] $A_4 = 0,8649$. Так как в рассмотренном примере A_2 и A_4 представлены в комбинации $A_2 - \frac{7}{8}A_4$ (это становится ясным, когда делаются подробные выкладки), то вид (П1.30) с числами более компактен, чем с коэффициентами A_2 и A_4 .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Моменты функций распределения

Рассмотрим функцию распределения вида

$$f = \begin{cases} f_1 = n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT_1} [(\xi_x - u_1)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2] \right\} & \text{при } \xi_x > 0; \\ f_2 = n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT_2} [(\xi_x - u_2)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2] \right\} & \text{при } \xi_x < 0. \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

Из выражения (П2.1) ясно, что при интегрировании по пространству скоростей (по ξ_x) справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\vec{\xi}) f d\vec{\xi} = \int_{-\infty}^0 f_2 \Phi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} + \int_0^{\infty} f_1 \Phi(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (\text{П2.2})$$

Для примера вычислим момент от функции распределения (П2.1) при $\Phi(\vec{\xi}) = \xi_x$. Согласно (П2.1) и (П2.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f d\vec{\xi} &= n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{m}{2kT_2} (\xi_x - u_2)^2 \right] \xi_x d\xi_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\xi_y^2 m/2kT_2 \right] d\xi_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{\xi_z^2 m}{2kT_2} \right] d\xi_z + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n_1 (m/2\pi k T_1)^{3/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{m}{2k T_1} (\xi_x - u_1)^2 \right] \xi_x d\xi_x \times \\
& \times \int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\frac{\xi_y^2 m}{2k T_1} \right] d\xi_y \int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\frac{\xi_z^2 m}{2k T_2} \right] d\xi_z. \quad (\text{П2.3})
\end{aligned}$$

В выражении (П2.3) интегралы по ξ_y и ξ_z являются интегралами Пуассона, т. е.

$$\int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\xi_y^2 m/2k T_1 \right] d\xi_y = (2\pi k T_1/m)^{1/2} \quad \text{и т. п.} \quad (\text{П2.4})$$

С учетом последних соотношений (П2.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \xi_x f d\vec{\xi} &= n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{m}{2k T_2} (\xi_x - u_2)^2 \right] \xi_x d\xi_x + \\
& + n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{m}{2k T_1} (\xi_x - u_1)^2 \right] \xi_x d\xi_x. \quad (\text{П2.5})
\end{aligned}$$

Прибавим и вычтем в подинтегральных выражениях соответственно u_2 и u_1 . Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \xi_x f d\vec{\xi} &= n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{m}{2k T_2} (\xi_x - u_2)^2 \right] (\xi_x - u_2) \times \\
& \times d(\xi_x - u_2) + u_2 n_2 \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{m}{2k T_2} (\xi_x - u_2)^2 \right] d(\xi_x - u_2) + \\
& + n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{m}{2k T_1} (\xi_x - u_1)^2 \right] (\xi_x - u_1) d(\xi_x - u_1) + \\
& + u_1 n_1 \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{1/2} \int_0^\infty \exp \left[-\frac{m}{2k T_1} (\xi_x - u_1)^2 \right] d(\xi_x - u_1). \quad (\text{П2.6})
\end{aligned}$$

Введя новые переменные $\xi_x - u = y$; $m/2kT_1 = \alpha_1$; $m/2kT_2 = \alpha_2$, для первого интеграла в (П2.6) получим выражение

$$n_2 \left(\frac{m}{2\pi kT_2} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{m}{2kT_2} (\xi_x - u_2)^2 \right] (\xi_x - u_2) d(\xi_x - u_2) = \\ = n_2 \sqrt{\alpha_2/\pi} \int_{-\infty}^{-u_2} e^{-\alpha_2 y^2} y dy. \quad (\text{П2.7})$$

Другие интегралы приводятся к виду, подобному (П2.7) аналогично. Далее произведем еще одну замену переменных

$$\int e^{-y^2 \alpha_2} y dy = -\frac{1}{2\alpha_2} \int e^z dz, \quad (\text{П2.8})$$

где $z = -\alpha_2 y^2$.

При расчетах используются равенства

$$\int_{-\infty}^{-u_2} = \int_{-\infty}^0 - \int_{-u_2}^0 \quad \text{и} \quad \int_{-u_1}^{\infty} = \int_{-u_1}^0 + \int_0^{\infty}. \quad (\text{П2.9})$$

Учитывая (П2.8) и (П2.9), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f d\vec{\xi} = -n_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\pi}} \frac{1}{2\alpha_2} \int_{-\infty}^0 e^z dz + \\ + n_2 \sqrt{\alpha_2/\pi} \frac{1}{2\alpha_2} \int_{-u_2}^0 e^z dz + u_2 n_2 \sqrt{\alpha_2/\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha_2 y^2} dy - \\ - u_2 n_2 \sqrt{\alpha_2/\pi} \int_{-u_2}^0 e^{-\alpha_2 y^2} dy - n_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\pi}} \frac{1}{2\alpha_1} \int_0^{-\infty} e^z dz - \\ - n_1 \sqrt{\alpha_1/\pi} \frac{1}{2\alpha_1} \int_{-\alpha_1 u_1^2}^0 e^z dz + u_1 n_1 \sqrt{\alpha_1/\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 y^2} dy + \\ + u_1 n_1 \sqrt{\alpha_1/\pi} \int_{-u_1}^0 e^{-y^2 \alpha_1} dy. \quad (\text{П2.10})$$

Интегралы, входящие в (П2.10), довольно часто встречаются, поэтому дадим их значения

$$\int_{-\infty}^0 e^z dz = 1; \quad \int_{-\alpha_2 u_2^2}^0 e^z dz = 1 - e^{-\alpha_2 u_2^2}; \quad \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha_2 y^2} dy = 1/2 \sqrt{\pi/\alpha_2};$$

$$\int_0^{-\infty} e^z dz = -1; \quad \int_{-\alpha_1 u_1^2}^0 e^z dz = 1 - e^{-\alpha_1 u_1^2}; \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 y^2} dy = 1/2 \sqrt{\pi/\alpha_1};$$

$$\int_{-u_1}^0 e^{-\alpha_1 y^2} dy = \int_0^{u_1} e^{-\alpha_1 y^2} dy = 1/2 \sqrt{\pi/\alpha_1} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha_1} u_1);$$

$$\int_{-u_2}^0 e^{-\alpha_2 y^2} dy = 1/2 \sqrt{\pi/\alpha_2} \operatorname{erf}(\sqrt{\alpha_2} u_2), \quad (\text{П2.11})$$

где $\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha_2} u_2)$ — функция ошибок. По определению $\operatorname{erf}(\sqrt{\alpha_2} u_2) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^{\sqrt{\alpha_2} u_2} e^{-t^2} dt$. Подставив (П2.11) в (П2.10) и вернувшись к прежним переменным T и u , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x f d\vec{\xi} = n_1 \sqrt{kT_1/2\pi m} \exp(-u_1^2 m/2kT_1) -$$

$$- n_2 \sqrt{kT_2/2\pi m} \exp(-u_2^2 m/2kT_2) +$$

$$+ \frac{u_1 n_1}{2} + \frac{u_1 n_1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{u_1}{\sqrt{2kT_1/m}}\right) + \frac{u_2 n_2}{2} -$$

$$- \frac{u_2 n_2}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2kT_2/m}}\right). \quad (\text{П2.12})$$

Для других $\varphi(\vec{\xi})$ моменты вычисляются аналогично. Не приводя подробных выкладок, представим конечные результаты. Прежде введем обозначения:

$$\psi_1 = \operatorname{erf}\left(\frac{u_1}{\sqrt{2kT_1/m}}\right), \quad \psi_2 = \operatorname{erf}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2kT_2/m}}\right),$$

$$\omega_1 = e^{-\frac{u_1^2 m}{2kT_1}} \quad \text{и} \quad \omega_2 = e^{-\frac{u_2^2 m}{2kT_2}}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 f d\vec{\xi} &= \frac{n_1 kT_1}{2m} + \frac{n_2 kT_2}{2m} + \frac{n_1 kT_1}{2m} \psi_1 - \frac{n_2 kT_2}{2m} \psi_2 + \\
&+ u_1 n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} \omega_1 - u_2 n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} \omega_2 + \\
&+ \frac{u_1^2 n_1}{2} + \frac{u_2^2 n_2}{2} + \frac{u_1^2 n_1}{2} \psi_1 - \frac{u_2^2 n_2}{2} \psi_2; \quad (\text{П2.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x \xi_y^2 f d\vec{\xi} &= n_1 \frac{4kT_1}{m} \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} \omega_1 - n_2 \frac{4kT_2}{m} \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} \omega_2 + \\
&+ n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} u_1^2 \omega_1 - n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} u_2^2 \omega_2 + {}^{5/2} n_1 \frac{kT_1}{m} u_1 + \\
&+ {}^{5/2} n_2 \frac{kT_2}{m} u_2 + {}^{5/2} n_1 \frac{kT_1}{m} u_1 \psi_1 - {}^{5/2} n_2 \frac{kT_2}{m} u_2 \psi_2 + \\
&+ \frac{n_1 u_1^3}{2} + \frac{n_2 u_2^3}{2} + \frac{n_1 u_1^3}{2} \psi_1 - \frac{n_2 u_2^3}{2} \psi_2; \quad (\text{П2.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^2 \xi_y^2 f d\vec{\xi} &= {}^{5/2} n_1 \frac{k^2 T_1^2}{m^2} + {}^{5/2} n_2 \frac{k^2 T_2^2}{m^2} + {}^{5/2} n_1 \frac{k^2 T_1^2}{m^2} \psi_1 - \\
&- {}^{5/2} n_2 \frac{k^2 T_2^2}{m^2} \psi_2 + 7n_1 \frac{kT_1}{m} \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} u_1 \omega_1 - \\
&- 7n_2 \frac{kT_2}{m} \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} u_2 \omega_2 + 4n_1 \frac{kT_1}{m} u_1^2 + 4n_2 \frac{kT_2}{m} u_2^2 + \\
&+ 4n_1 \frac{kT_1}{m} u_1^2 \psi_1 - 4n_2 \frac{kT_2}{m} u_2^2 \psi_2 + n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} u_1^3 \omega_1 - \\
&- n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} u_2^3 \omega_2 + \frac{n_1 u_1^4}{2} + \frac{n_2 u_2^4}{2} + \\
&+ \frac{n_1 u_1^4}{2} \psi_1 - \frac{n_2 u_2^4}{2} \psi_2; \quad (\text{П2.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^3 f d\vec{\xi} = & n_1 \frac{2kT_1}{m} \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} \omega_1 - n_2 \frac{2kT_2}{m} \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} \omega_2 + \\
& + {}^3/2 n_1 \frac{kT_1}{m} u_1 + {}^3/2 n_2 \frac{kT_2}{m} u_2 + {}^3/2 n_1 u_1 \frac{kT_1}{m} \psi_1 - \\
- {}^3/2 n_2 u_2 \frac{kT_2}{m} \psi_2 + & n_1 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} u_1^2 \omega_1 - n_2 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} u_2^2 \omega_2 + \\
& + \frac{n_1 u_1^3}{2} + \frac{n_2 u_2^3}{2} + \frac{n_1 u_1^3}{2} \psi_1 - \frac{n_2 u_2^3}{2} \psi_2; \quad (\text{П2.16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \xi_x^4 f d\vec{\xi} = & {}^3/2 n_1 \frac{k^2 T_1^2}{m^2} + {}^3/2 n_2 \frac{k^2 T_2^2}{m} + {}^3/2 n_1 \frac{k^2 T_1^2}{m^2} \psi_1 - \\
- {}^3/2 n_2 \frac{k^2 T_2^2}{m^2} \psi_2 + & 5n_1 \frac{kT_1}{m} \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} u_1 \omega_1 - \\
- 5n_2 \frac{kT_2}{m} \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} u_2 \omega_2 + & 3n_1 \frac{kT_1}{m} u_1^2 + \\
+ 3n_2 \frac{kT_2}{m} u_2^2 + 3n_1 \frac{kT_1}{m} u_1^2 \psi_1 - & 3n_2 \frac{kT_2}{m} u_2^2 \psi_2 + \\
+ n_1 u_1^3 \sqrt{\frac{kT_1}{2\pi m}} \omega_1 - n_2 u_2^3 \sqrt{\frac{kT_2}{2\pi m}} \omega_2 + & \\
+ \frac{n_1 u_1^4}{2} + \frac{n_2 u_2^4}{2} + \frac{n_1 u_1^4}{2} \psi_1 - \frac{n_2 u_2^4}{2} \psi_2. \quad (\text{П2.17})
\end{aligned}$$

Полученные выражения (П2.12)–(П2.17) носят общий характер. В линейной теории, ввиду малости u_1 и u_2 , пренебрегают членами, в которых степень u выше первой.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Решение системы уравнений сохранения для задачи о нелинейной переконденсации

Решаются шесть уравнений сохранения, входящие в систему (3.59), для заданного значения $j_x = j$. В результате последовательного исключения неизвестных получается квад-

ратное уравнение относительно $[T_1(1)]^{1/2}$. Решение этого уравнения дает возможность определить все величины, входящие в систему уравнений сохранения.

$$[T_1(1)]^{1/2} = \frac{n_r T_r - n_x T_x}{n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2}} + \sqrt{\frac{n_r n_x T_x^{1/2} T_r^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2})^2 (n_r T_r^{1/2} - j)}{(n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2})^2 (n_x T_x^{1/2} + j)}}; \quad (\text{П3.1})$$

$$[T_2(0)]^{1/2} = \frac{n_x T_x - n_r T_r}{n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2}} + \sqrt{\frac{n_r n_x T_x^{1/2} T_r^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2})^2 (n_x T_x^{1/2} + j)}{(n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2})^2 (n_r T_r^{1/2} - j)}}; \quad (\text{П3.2})$$

$$2n(0) = \frac{n_r n_x T_x^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2}) - j (T_r^{1/2} n_r + T_x^{1/2} n_x) + n_r A_1}{n_x T_x - n_r T_r + A_1}; \quad (\text{П3.3})$$

$$2n(1) =$$

$$\frac{n_r n_x T_r^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2}) + j (n_x T_x^{1/2} + n_r T_r^{1/2}) + \frac{n_r T_r^{1/2} - j}{n_x T_x^{1/2} + j} n_x A_1}{n_r T_r - n_x T_x + \frac{n_r T_r^{1/2} - j}{n_x T_x^{1/2} + j} A_1}; \quad (\text{П3.4})$$

$$\Pi_{xx} =$$

$$\frac{n_r n_x T_x^{1/2} T_r^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2}) + j (n_r T_r - n_x T_x) + (n_r T_r^{1/2} - j) A_1}{n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2}}; \quad (\text{П3.5})$$

$$E_x = 2 \frac{\Pi_{xx} (n_r T_r - n_x T_x) - \frac{1}{2} j (n_r T_r^{3/2} + n_x T_x^{3/2})}{n_r T_r^{1/2} + n_x T_x^{1/2}}; \quad (\text{П3.6})$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{n_r n_x T_x^{1/2} (T_r^{1/2} + T_x^{1/2})^2 (n_x T_x^{1/2} + j) T_r^{1/2}}{n_r T_r^{1/2} - j}}. \quad (\text{П3.7})$$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.//Физическая кинетика. Сер. «Теоретическая физика». Том 10. М.: Наука, 1979.
 2. Гудман Ф., Вахман Г. Динамика рассеяния газа поверхностью. М.: Мир, 1980.
 3. Больцман Л. Лекции по теории газов. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
 4. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
 5. Жданов В. М., Алиевский М. Я. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989.
 6. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases//Phys. Rev., 1954. Vol. 94. № 3. P. 511—525; Пер. с англ. В сб. «Проблемы современной физики». Т. 2. М.: Иностранная литература, 1956.
 7. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974.
 8. Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Прямое численное решение кинетического уравнения Больцмана. М.: ВЦ РАН, 1992.
 9. Maxwell J. C. On the Stresses in Rarefied Gases. The Scientific Papers. Vol. 2. Paris, 1927. P. 681—712.
 10. Ивченко И. Н., Лоялка С. К., Томпсон Р. В. Об одном методе решения проблемы переноса тепла между двумя цилиндрами при произвольных числах Кнудсена//Теплофизика высоких температур, 1993. Т. 31, № 4. С. 636—641.
 11. Муратова Т. М., Лабунцов Д. А. Кинетический анализ процессов испарения и конденсации//Теплофизика высоких температур, 1969. Т. 7, № 5. С. 959—967.
 12. Macrobert T. M. Spherical Harmonics. Oxford, 1967.
 13. Лабунцов Д. А. Анализ процессов испарения и конденсации//Теплофизика высоких температур. 1967. Т. 5, № 4. С. 647—654.
 14. Liu C. Y., Lees L. Kinetic Theory Description of a Plane Compressible Couette Flow. In: Proc. of 2-nd Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics (edited by L. Talbot.) N. Y.: Academic Press. Inc. 1961. P. 391—428.
 15. Lavin M. L., Naviland G. K. Application of a Moment Method of Heat Transfer in Rarefied Gases//Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. № 3. P. 274—279.
 16. Лабунцов Д. А., Ягов В. В., Крюков А. П. Основы механики двухфазных систем. М.: Моск. энерг. ин-т, 1988. 76 с.
 17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.//Гидродинамика. Сер. «Теоретическая физика». Т. 6. М.: Наука, 1986.
 18. Лабунцов Д. А., Крюков А. П. Отражение звука от свободной поверхности жидкости//Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25, № 3. С. 536—543.
 19. Халатников И. М. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Основные понятия и определения	3
2. Кинетическое уравнение Больцмана	8
3. Решение кинетического уравнения Больцмана для задач энерго- массопереноса	27
4. Отражение звука от межфазной поверхности сверхтекучего гелия	46
Приложения	57
Литература	70

Алексей Павлович Крюков

ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Учебное пособие

по курсу

«Основы криофизики»

(Кафедра низких температур)

Редактор издательства *Е. А. Улановская*
Технический редактор *В. З. Комарова*
Корректор *В. В. Сомова*

Темплан издания МЭИ 1994 (I), учебн.

Подписано к печати 16.08.95 г.

Формат бумаги 60×84/16

Физ. печ. л. 4,5 Усл. печ. л. 4,18 Уч.-изд. л. 3,6

Тираж 500 Изд. № 103 Заказ 95

Типография Издательства МЭИ, Красноказарменная, 13